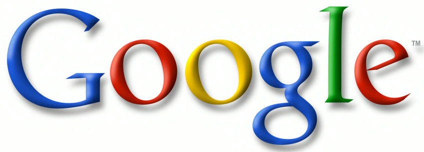
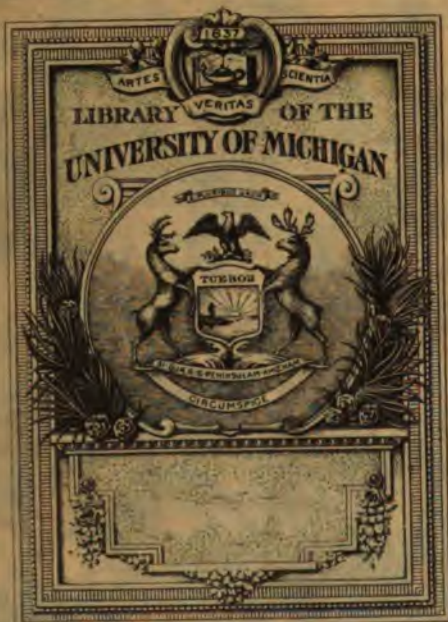



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE




Anfangsgründe der Mathematik,

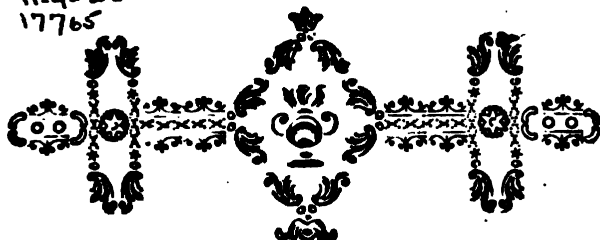
zum Gebrauche
der mathematischen Schule des kaiserl. königl.
Artilleriekorps.

Dritter Teil.

Die
Mechanik, Hydrostatik, Aerometrie
und Hydraulik
oder
von dem Gleichgewicht, und von der Bewegung der festen, und flüssigen
Körper.

Verfaßt
Von Leopold Unterberger,
Major und öffentlichen Lehrer der Mathematik
bei dem kaiserl. königl. Feldartilleriekorps.

WIEN,
gedruckt bey Joh. Thom. Edl. von Trattnern,
kaiserl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.
1781.



Vorrede.

Nach öftern und langen Unterbrechungen bin ich endlich im Stande den dritten Teil der mathematischen Anfangsgründen, der von der Bewegung der festen und flüssigen Körper handelt, zu liefern. Ich brauche ienen Anfängern, für die dieses Werk eigentlich bestimmt ist, die Nothwendigkeit der Mechanik zur gründlichen Erlehrung ihres Metiers nicht erst weitläuftig zu erklären und anzupreisen, da ihnen ohnehin nicht mehr unbekant sein kan, daß die Artilleriewissenschaft, in so ferne sie Körper nach einem verlangten Gegenstand schiessen und werfen lehret, auf gewisse Art selbst als ein Teil der Mechanik angesehen werden mus. Vielmehr scheint mir daran zu liegen, meine übrigen Leser zu unterrichten, welchen Gesichtspunkt ich mir bei der Verfassung dieser Anfangsgründen der Mechanik genommen habe, damit Sie solche nach eben demselben zu betrachten und zu beurteilen die Güte haben möchten.

Vorrede.

Da dieses Werk angehenden Artilleristen in der Schule vorgetragen, und mündlich erklärt zu werden bestimmt ist, so mus es zwar die wesentlichsten Gründe hauptsächlich iener Teilen der Mechanik die in die Artillerie einigen Einfluß nehmen, enthalten; dieselbe dörfen aber nicht zu weit ausgedehnet werden, damit die Vorlesungen nicht übermässig lang dauren. Ich schränke mich also dahin ein, daß ich

Erstens: eine kurze Einleitung in die Mechanik gebe, und darinn die algemeinen Eigenschaften der Körper und die ersten und nöthigsten Begriffe davon vortrage.

Zweitens: folgen die Gründe von der einfachen und zusammengesetzten, von der zu und abnehmenden Bewegung und von dem freien Falle der Körper.

Drittens: kommt die Lehre von den geworfenen Körpern vor. Weil diese Materie hauptsächlich einen Artilleristen angehet, so habe ich sie etwas weiter als die übrigen ausgedehnet. Ich werde mir zwar vielleicht dadurch, daß ich diese Abhandlung blos nach der Theorie der Parabol einrichte, den Tadel einiger meiner Leser zuziehen; allein ich habe anmit die Ehre dieselben zu versichern, daß solches weder aus einer Unwissenheit, daß die geworfenen Körper in ihrem Fluge keine würkliche Parabol beschreiben, noch weniger aber aus einiger Verachtung gegen eine Erfindung die dem menschlichen Verstande so viele Ehre macht, nehmlich gegen dem höhern Kalkul, sondern blos aus der Ursach so geschehen seie, erstens weil ich schon beim Anfange meiner Arbeit ausdrücklich befehliget

wur-

wurde, in diesen Anfangsgründen der Mathematik, welche eigentlich für alle unsere Zöglinge bestimmt sind, noch nichts von den höhern Teilen einfliessen zu lassen; zweitens weil man in der Bestimmung der wahren Grösse des Widerstandes der Luft, und folglich auch der eigentlichen Fluglinie der Bomben und Kugeln wegen den in der Ausübung vorkommenden zufälligen, nichts destoweniger aber oft sehr beträchtlichen Hindernissen es bisher noch nicht soweit gebracht zu haben scheint, daß man in der Ausübung einen algemeinen Gebrauch davon machen, oder einen wesentlichen Vorteil ziehen könnte. Daß diese Hindernissen sich in der That einfinden, wird wohl niemand läugnen, der mit den Artillerieübungen näher bekannt ist, und folglich weis, wie man mit volkommen gleichen Ladungen und Richtungen des Geschützes dennoch oft sehr beträchtlich unterschiedene Schuß und Wurfweiten erhält. Wenn man von den neu entdeckten Fluglinien der Bomben und Kugeln einen wahrhaft nützlichen Gebrauch zu machen hoffen will, so ist meines Erachtens nichts so nothwendig, als diesen Hindernissen fleissig nachzuspüren, ihren Würkungen so viel möglich vorzubeugen, oder wenigstens die Grösse derselben nur einiger Maassen zu bestimmen zu suchen. Hier ist es eigentlich, wo einem eifrigen und aufgeklärten Beobachter noch ein sehr weites Feld offen stehet, und nur wenn dieses gehörig bearbeitet sein wird, werden wir die Kunst zu schiessen und werfen auf eine grössere Volkommenheit zu bringen im Stande sein.

Viertens: werden die ersten Gründe von dem Stosse der volkommen elastischen und nicht elastischen Körper vorgetragen; ich habe mich aber enthalten würk-

liche Anwendungen davon auf dem Stose der Kugeln und Bomben, und ihr Eindringen in die Gegenstände zu machen, teils weil mir volständige Experimente fehlen; teils auch weil man wegen der fast unendlichen Verschiedenheit der Materien, gegen welche geschossen oder geworfen wird, fast nichts als blosse Voraussetzungen machen kan.

Fünftens: wird sowohl die Erfindung des Schwerpunkts an verschiedenen Linien, Flächen und Körpern, als die Berechnung ihres Inhalts nach dem Wege, den der Schwerpunkt an ihrer Erzeugungsfläche bei ihrer Entstehung gehet, gewiesen. Da manche Flächen und Körperinhalte ohne dieser so schönen als nützlichen Erfindung, durch die gewöhnlichen Regeln der Geometrie nur sehr schwer gefunden werden könten, und bei der Berechnung des kubischen Inhalts und der Schwere des Metals eines Geschützes eben solche Körper vorkommen, und die erforderliche Lage der Schildzapfen an einer Kannone durch die Erfindung ihres Schwerpunktes bestimmt werden mus, so wird diese Materie einem Artilleristen besonders unentbehrlich.

Sechstens: kommt die Abhandlung von den einfachen und zusammengesetzten Machinen blos nach ihrem Gleichgewichtsstande und ohne Reibung ihrer Teile betrachtet vor; dann aber wird auch in verschiedenen und meist vorkommenden Fällen gewiesen, wie die Grösse der Reibung an den verschiedenen Teilen der Machinen zu berechnen seie. Da der Raum keine weitere Ausdehnung über diese Materie erlaubet, und die Hauptabsicht mehr dahin gehet, daß ieder angehender Artillerist von dem Machinenwesen zwar algemeine gründliche Begriffe, keines Wegs aber eine vol-

kom-

kommen ausgebreitete Kenntnis eines eigentlichen Machinisten erlange, so könte das, was davon angeführet worden, hinlänglich sein.

So wie bisher die Lehre von der Bewegung der festen Körper vorgetragen worden, eben so darf unsern Anfängern die Kenntnis von dem Gleichgewicht, von dem Druck, und von der Bewegung der flüssigen Körper nicht unbekant bleiben. Derowegen werden

Siebentens: die Gesetze von dem Gleichgewicht der flüssigen Körper, von ihrem Druck gegen die Grund und Seitenflächen ihrer Behälter, von eingetauchten festen Körpern in flüssige, und von der eigenthümlichen Schwere verschiedener Materien vorgetragen.

Da ferner ohnehin einleuchtend genug ist, was die Luft sowohl auf das Schießpulver als auf die geschossenen und geworfenen Körper für eine Macht hat, so können die Eigenschaften und Würkungen derselben, in so weit sie uns nehmlich bekant sind, um so weniger übergangen werden; aus dieser Ursach wird

Achtens: von den Eigenschaften der Luft überhaupt, dann von dem Gleichgewicht derselben mit andern flüssigen Materien, und endlich von der Bewegung derselben und von dem Widerstand, den sie gegen andere Körper ausübet, gehandelt. Nur Schade! daß die menschliche Kenntnis hierinnen wie in vielen andern physisch-mathematischen Dingen noch nicht gänzlich soweit gekommen ist, die Grösse ihrer Würkungen in allen Fällen so richtig voraus bestimmen zu können, wie wohl bei den Ausübungen in der Artillerie nöthig wäre.

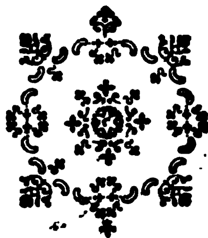
Et-

Vorrede.

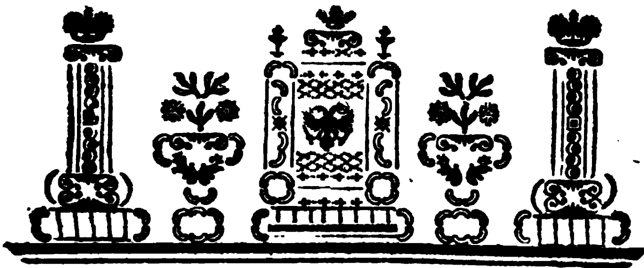
Etwas minder wichtig für einen Artilleristen scheinen die Gesetze der Bewegung des Wassers oder anderer flüssiger Materien zu sein; um aber doch einige Kenntnisse im bedürfenden Falle zu haben, so wird endlich

Neuntens, von der Bewegung des Wassers so wohl durch seine eigene Schwere, als durch den Druck der Luft nur im kurzen gehandelt; dann werden einige Gründe von dem Stose des Wassers gegen demselben entgegengesetzte Flächen angegeben, und letztlich einige der üblichsten und nützlichsten Wassermachinen erkläret.

Ubrigens wünsche ich nichts so sehr, als durch diese meine Bemühung die Hauptabsicht zu erreichen, und den Beifal meiner Leser zu verdienen.



An-



Anfangsgründe der Mechanik.

Einleitung.

§. 1.

Ein Körper ist ein Zusammenhang von mehreren Teilen der Materie, woraus er bestehet, und hat folgende algemeine Haupteigenschaften in sich:

1. Kein Teil der Materie, so klein man sich ihn auch vorstellet, kan mit einem andern in dem nehmlichen Ort zu gleicher Zeit sein; d. i. die Materie oder der Körper ist undurchdringlich (Corpus est impenetrabile).

2. Da die Teile des Körpers wegen der Undurchdringlichkeit ausser und nebeneinander sein müssen, so mus derselbe nothwendig einen Raum in die Länge,

Breite, und Höhe einnehmen; folglich eine **Ausdehnung** haben, (Volumen). §. 3. Geomet.

3. Die äusserste Gränzen der Ausdehnung eines Körpers heisset man die **Figur** desselben (Figura).

4. Jeder Körper ist aus mehrern Teilen der Materie zusammengesetzt, §. 1. Weil aber der Zusammenhang der Materie zu ihrem Dasein eben nicht ausdrücklich nöthig ist, so lassen sich dieselbe entweder im Gedanken, oder würklich von einander trennen oder absondern; D. i. **der Körper ist teilbar.** (Corpus est divisibile).

Solche Zerteilungen geschehen so wohl durch die Kunst als durch die Natur fast bis ins Unendliche. Z. B. Man schlägt eine einzige Gran Gold durch die Kunst so dünne, daß solche eine Fläche von 50 Quadratzollen bedecket. Nun giebt die Erfahrung, daß ein eben nicht alzu scharfes Auge, wenn es auch mit keinem Vergrösserungsglase bewaffnet wird, einen halben Punkt oder den 24ten Teil einer Längenlinie noch wohl unterscheiden könne. Da nun in einem Längenzolle 288 solche halbe Punkten enthalten sind, so müssen sich in einem Quadratzolle 288 × 288 = 82944 solche halbe Quadratpunkten, und folglich in 50 Quadratzollen 4147200 als sichtbar befinden. Betrachtet man ferner, daß man an dieser Goldplatte auf einer Seite nicht die nehmliche Teile wie auf der andern, sondern wiederum neue zu Gesicht bekömt, so ist klar, daß man zu beiden Seiten 4147200 × 2 = 8294400 Teile entdecken könne. Sollte aber das Auge noch mit einem Vergrösserungsglase, welches die Gegenstände um 10000male vergrössert (welches eben nichts ausserordentliches ist) verstärkt werden, so wurden

auch noch 10000mal kleinere Teile kentlich, und also 8294400 × 10000 = 82944000000 Teile von einer einzigen Gran Gold zu sehen sein. Eine beträchtliche Summe! und dennoch wird das Gold bei der Vergoldung eines Stücks Silber, und Ausziehung desselben bis zum feinsten Drate, dessen man sich gewöhnlich zu Borden wirken und andern dergleichen Arbeiten bedienet, und der noch immer vergoldet ist, in noch weit zärtere Teile zerteilet. Die Natur gehet in der Zerteilung der Körper in sehr kleine Teile ungleich weiter, als wir durch die Kunst zu thun vermögen. Es verräth sich dieses an der Ausduftung von riechenden Sachen am aller deutlichsten. Z. B. Wenn nur eine Gran Ambra auf Kohlenfeuer verbrant wird, so nimt der Geruch davon ein ganzes grosses Zimmer ein. Wer wird nun wohl läugnen, daß nicht fast in den meisten Punkten des Zimmerraumes ein kleines Ambrateilchen befindlich sei? Eben so ist es mit der Ausdünstung der Blumen und Kräuter, des Teufelsdrecks (Assa foetida) des Schwefels, und mit den in Dunst aufgelösten Geistern und Wässern beschaffen.

5. Lehret uns die Erfahrung, daß alle bisher bekante Körper mit Schweislöchern versehen sind. (Corpus porosum est). D. i. die kleine Teile der Materie, woraus der Körper bestehet, hangen nicht gänzlich so nahe zusammen, daß kein Zwischenraum staat hätte.

Man trift vielmehr dergleichen in allen, auch iene nicht ausgenommen, die uns am dichtesten scheinen, an. Diese Schweislöcher (Pori) sind bei einigen z. B. bei einem Schwammen, bei dem

Bimsenstein u. m. d. g. augenscheinlich sichtbar; bei andern sind sie zwar nicht so deutlich, aber die Vergrösserungsgläser, und andere damit angestelte Versuche geben sie uns unzweifelhaft zu erkennen; der Unterschied derselben bestehet hauptsächlich nur in dem, daß sie in dichtern Körpern seltner, oder kleiner, in weniger dichten aber häufiger oder grösser, und in verschiedenen Materien auch von verschiedener Gestalt und Ordnung angetroffen werden.

6. Alle Körper die unserer Erdkugel noch in einer gewissen Nähe sind, haben eine gewisse Kraft, vermög welcher sie gerade gegen dem Mittelpunkt der Erde mit gleicher Geschwindigkeit geführet werden, wenn sie nicht durch äussere Gegenstände daran gehindert sind; und diese Kraft wird die Schwere (Gravitas) genent.

Sie ist in dem ganzen Körper ausgeteilet, d. i. auch die kleinsten Teile der Materie, woraus der Körper bestehet, sind, wenn sie einander gleich, mit gleicher Schwere begabt. Bestehet nun ein Körper aus mehrern solchen Teilen als ein anderer, so ist er auch schwerer als derselbe.

§. 2. Die Menge der in einen Körper vorhandenen Materie wird die Masse (Massa) genent. Wenn nun die erstere in Körpern von gleicher Ausdehnung und gleichartiger Materie gleich ist, so sind auch ihre Massen gleich; oder sie verhalten sich in Körpern von ungleicher Ausdehnung wie diese. Da aber die Menge der Materie in ungleichartigen Körpern von gleicher Ausdehnung nicht gleich ist, so kan auch ihre Masse mit ihrer Ausdehnung nicht gleich sein. Z. B. die

Masse einer eisernen Kugel verhält sich zu der Masse einer andern von eben der Materie wie der Kubikinhalt oder die Ausdehnung der ersten zu der Ausdehnung der zwoten. Man kan aber nicht sagen, daß sich die Masse eines Stück Holzes zu der eines Stück Eisens wie die Ausdehnung des ersten zur Ausdehnung des zweiten verhalte.

§. 3. **Die Ruhe** (Quies) eines Körpers ist die Verbleibung desselben in einem Orte; **Die Bewegung** desselben (Motus) ist hingegen die Übersetzung von einem Orte in dem andern.

§. 4. Jeder Körper *hat* eine Kraft, durch die er sich in dem Stande zu erhalten suchet, in welchen er sich *gegenwärtig befindet*, und solche wird die **Kraft der Trägheit** (vis innertiæ) genent. Ist also ein Körper in der Ruhe, so verbleibt er so lang in derselben, bis ihn eine andere äussere Kraft daraus bringet, oder in Bewegung setzet; bewegt sich aber derselbe einmal, so dauret auch seine Bewegung so lange fort, bis er von einer äussern Kraft daran verhindert wird. Da ieder Teil der Materie, so klein man ihn auch annehmen wil, eine Kraft der Trägheit besitzet, so müssen mehrere zusammen genommen auch eine grössere Trägheit haben, und sie mus folglich mit der Masse in Proportion stehen.

Z. B. Um zwo Kugeln von gleichem Durchmesser aber eine von Eisen, und die andere von Wachs in Bewegung zu setzen, wird die erstere der bewegenden Kraft mehr als die andere widerstehen; wenn sie aber einmal in Bewegung sind, so wird um sie aufzuhalten bei der eisernen mehr Kraft als bei der wächsernen erfordert werden; in beiden Fällen aber wird die bewegende oder hem-

mende Kraft bei der einen um so grösser sein müssen, als sie von grösserer Masse als die andere ist.

§. 5. Wenn ein schwerer Körper in seinem Falle gegen dem Mittelpunkt der Erde durch einen andern aufgehalten wird, so behält er sein ganzes Bemühen weiter zu fallen allezeit bei, und übet also einen Druck gegen ihn aus, der seiner Masse proportional ist, und das Gewicht des Körpers genent wird.

Daher kan man also das Gewicht für die Masse oder diese anstaat ienen brauchen.

Aus diesem Grunde wird der Durchmesser der Stuckkugeln aus ihrem Gewichte, oder dieses aus ienem bestimmet.

Da die Erde als eine Kugel angesehen werden kan, und die Richtung der Schwere von dem Umkreise derselben in gerader Linie nach dem Mittelpunkt gehet, so ist iede Linie nach welcher ein unverhinderter Körper dahin fallet, als ein Radius zu betrachten. Geomt. §. 12, und weil ieder Radius auf seiner Tangente und auch auf seinen Bogen senkrecht stehet, Geom. §. 69. der scheinbare Horizont aber eine Tangent, und der wahre ein Zirkelbogen ist, so ist auch die Richtungslinie der Schwere auf beiden senkrecht. Darin ist demnach der Grund enthalten, daß man durch Hülfe eines frei hangenden Senkels erstlich eine eigentliche Perpendikular, und dann zu dieser eine scheinbare Horizontal erhält, wenn sie beiderseits rechte Winkel bekommen.

§. 6. Die Erfahrung lehret, daß alle Körper mit gleicher Geschwindigkeit zum Mittelpunkt der Erde trachten, wenn sie durch nichts verhindert werden.

Wenn

Wenn man die Luft aus einen hohlen gläsernen Cylinder von beträchtlicher Höhe durch die Luftpumpe ziehet, und in denselben zwo Kugeln, eine von Blei und die andere von Kork; oder ein Stück Gold und eine Pflaumfeder zu gleicher Zeit herabfallen läst, so kommen beide Körper zugleich auf den Boden; geschiehet aber dieser Versuch in freier Luft, so zeigt sich ein merklicher Unterschied in der Geschwindigkeit des Falles dieser Körper, weil die Luft einem mehr als dem andern widerstehet.

§. 7. Die Körper sind von verschiedener Art, d. i. der Zusammenhang der Materie ist bei einem nicht so wie bei dem *andern*; und zwar ist

1. **Ein dichter Körper** dessen Teile so fest zusammen hangen, daß sie ohne besondere äussere Gewalt nicht getrennet werden können. Z. B. Holz, Stein, Metal. u. d. g.

2. **Ein flüssiger Körper** dessen kleinste Teile einzeln unsichtbar einem ieden Eindruck also bald nachgeben, oder weichen, sich unter sich selbst sehr leicht bewegen, und deren Oberfläche wenn sie in Ruhe ist, allemal wagrecht wird. Z. B. Wasser, Luft, Quecksilber, Oel, u. d. g.

3. **Ein volkomen harter Körper** ist derienige, dessen Teile so fest zusammen hangen, daß sie auch dem stärkesten Stoß oder Drucke nichts nachgeben, und also der Körper seine Figur niemals verändert.

4. **Ein volkommen weicher Körper** dessen Teile einem ieden Eindruck weichen, sich aber nicht wieder herstellen können.

5. **Ein volkommen elastischer Körper** ist, dessen Figur durch ieden Eindruck verändert, aber mit eben der Kraft, die dem Eindruck gleich ist, also gleich wieder hergestellet wird. Diese Eigenschaft wird die Schnel- oder Federkraft (Elasticitas) genennt.

Obwohl die Natur weder einen volkommen harten, weichen oder elastischen Körper darbietet, sondern diese Eigenschaften allezeit so vermischt angetroffen werden, daß nur eine oder die andere in einem grössern oder kleinern Grade entdeckt wird, so ist doch nöthig, sich von dem grösten Grade derselben einen Begrif zu machen, weil er dienen kan, die Grösse der in den Körpern würklich vorgefundenen Härte, Weiche, oder Schnelkraft leichter auszumessen, oder mit andern zu vergleichen.

§. 8. Jede Ursache, so eine Bewegung herfürbringet, wird eine **Kraft** (vis) oder (Potentia) genent; und dasienige, was der Bewegung widerstehet, heisset insgemein die **Last** oder der **Widerstand** (Pondus, Resistentia).

§. 9. Wird die Bewegung von einer Kraft würklich herfürgebracht, so ist solche eine **lebendige Kraft** (vis viva) suchet aber eine Kraft einen Körper nur in Bewegung zu setzen, ohne daß diese würklich erfolget, so wird sie eine **todte Kraft** (vis mortua) genent.

§. 10. **Das gesamte ungebundene Vermögen** einer Kraft (vis absoluta) ist iener ganze Nachdruck den sie vermög ihrer natürlichen Beschaffenheit ausüben kan, wenn sie durch nichts verhindert wird.

Das würkliche Vermögen (vis respectiva) hingegen ist nur iener Nachdruck, den eine Kraft, nachdem

sie

sie durch etwas anderes zum Teil verhindert wird, ennoch ausüben kan.

Z. B. Wenn ein Mensch bei einer Arbeit eine so vorteilhafte Leibesstellung nehmen kan, daß er seine ganze Kraft anwenden kan, so ist dieselbe das ungebundene Vermögen, kan er aber wegen einer unbequemen Leibesstellung nicht seine ganze Stärke brauchen, so wird die Kraft so er ausübet, die würkliche Kraft genent.

§. 11. Die Geschwindigkeit ist die Verhältnis des Raumes zu der Zeit, den ein bewegter Körper in einer gewissen Zeit durchlauft. D. i. Wenn der durchloffene Raum $= S$, die Zeit, so dazu nöthig ware $= T$ ist, so wird die Geschwindigkeit $C = \frac{S}{T}$, und folglich $CT = S$ und $T = \frac{S}{C}$ sein.

Je grösser also der Raum ist, den ein Körper in einer gewissen Zeit durchlauft, ie grösser mus auch seine Geschwindigkeit sein.

Um die Geschwindigkeiten zweener Körper mit einander vergleichen zu können, ist erforderlich, daß man bei beiden gleiche Einheiten sowohl für das Zeitmaas als das Längenmaas des Raums annehme. D. i. Man brauchet bei beiden zum Beispiel zum Zeitmaas Sekunden, und zum Längenmaas Schuhe.

§. 12. Eine gleichförmige Bewegung wird dieienige genent, wenn ein Körper immer mit gleicher Geschwindigkeit bewegt wird; oder wenn die durchlofenen Räume zu den erforderlich gewesten Zeiten immer gleiche Verhältnisse haben.

§. 13. **Eine beschleinigte Bewegung** ist, wenn die Geschwindigkeit nach ieden Zeitraume beständig vermehrt wird. Eben so ist eine **zurückgehaltene** oder **gehemte Bewegung**, wenn die Geschwindigkeit immer kleiner wird, oder abnimt, oder wenn sich in einem als andern Falle die Verhältnis des Raumes zu der Zeit stäts ändert.

Wird die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten immer gleich viel vermehrt, oder vermindert, so wird die Bewegung auch eine **gleichförmig vermehrte** oder gehemte genent.

Der Anwachse der vermehrten Geschwindigkeit ist also dem Anwachse oder der Vermehrung der Zeit proportional, und in dem lezten Zeitpunkte der Bewegung ist die überkommene Geschwindigkeit des Körpers gleich der anfänglichen mehr so vielen Zuwachsen als sie in den verflossenen Zeiten erhalten hat. Was man also immer für Zeitteile nimt, so verhalten sich dieselbe wie die Geschwindigkeiten, die der Körper in denselben erhalten hat.

§. 14. Ein Körper hat eine **einfache Bewegung**, wenn er nur durch eine **Ursach** oder **Kraft** in Bewegung gesezt wird; hingegen ist seine **Bewegung zusammengesezt**, wenn mehrere **Kräfte** zu gleich und in verschiedenen Richtungen in ihn würken, daß die Bewegung erfolget.

In der Folge werden wir sehen, daß man iede einfache Bewegung als eine zusammengesezte, und umgekehrt diese als iene betrachten kan.

§. 15. **Die Kraft der Bewegung** ist iene Gewalt, so ein Körper durch die Bewegung überkomt,

und mit welcher er gegen einen ihm widerstehenden Gegenstand würket.

Die Erfahrung lehret, daß, wenn zwo Kugeln von gleicher Masse und ungleicher Geschwindigkeit; und zwo andere von ungleicher Masse und gleicher Geschwindigkeit bewegt werden, von den ersten zwoen iene, so mehr Geschwindigkeit, von dem andern zwoen aber die, so mehr Masse hat, mehr Kraft gegen einen ihnen entgegenstehenden Körper ausübe. Daher ist zu schliessen, daß die Kraft der Bewegung eines Körpers sowohl von seiner Masse als Geschwindigkeit abhange.

Ob man aber die Kraft der Bewegung durch das Produkt der Masse in die Geschwindigkeit, oder in das Quadrat derselben ausdrücken sol, ist unter den Gelehrten noch streitig. Cartesius und fast alle Franzosen sind der erstern Meinung, Leibniß hat zum erstenmal die zwote herfürgebracht, und viele Teutsche und Engländer folgen ihm. Beide haben starke Gründe für und wider sich; wir können uns aber in diese berühmte Streitfrage in diesem Werke nicht einlassen, weil sie uns zu weit von unserer Absicht führen würde. In der Folge werden wir uns zur Ausdrückung der Kraft der Bewegung allezeit des Produkts der Masse in die Geschwindigkeit bedienen, und zwar dieses nicht so viel darum, weil wir in der That für diese Meinung mehr eingenomen sind, als weil ihr heut zu Tage die meiste Gelehrte folgen. Wer hierüber sich mehr erkundigen wil, kan des Abbé Dedier Mechanic general, die Institution de Physic par Mr. Mairan, les Elemens de Physic de Mr. Gravesand, les Institutions de Physic par Mad. Chastelet. u. a. m. nachlesen.

Grundsätze der Bewegung.

§. 16. Jeder Körper sucht sich in dem Stand zu erhalten, in dem er ist.

Wenn er also in der Ruhe ist, so verbleibt er so lang in derselben, bis er durch eine äussere Ursache daran gestöhret, und in Bewegung gesetzt wird, und ist er einmal in Bewegung, so mus derselbe in der anfangs erhaltenen Richtung und Geschwindigkeit sich so lang fort bewegen, bis ihn eine andere Ursache daran verhindert.

Wenn also ein Körper nur durch eine Kraft allein in Bewegung gesetzt wird, so mus er eine gerade Linie beschreiben, so bald sich aber derselbe in einer krummen Linie beweget, so müssen zwo oder mehrere Kräfte nach verschiedenen Richtungen in ihn würken.

§. 17. Wenn ein Körper in einen andern würket um ihn in Bewegung zu setzen, so widerstehet ihm dieser eben so viel, als iener in ihn würket.

§. 18. Die Würkungen sind ihren Ursachen gleich. D. i. ie grösser die Kraft ist, welche einen Körper in Bewegung setzet, ie grössere Bewegung wird auch erfolgen.

Mehrere Gesätze der Bewegung werden in der Folge noch vorkommen.

§. 19. Die Wissenschaft, so uns die Bewegung der Körper nach den in der Natur gegründeten Gesätzen beurteilen oder einrichten lehret, wird öfters überhaupt unter dem Wort Mechanik verstanden; insbesondere aber erhält sie diese Benennung, wenn von der Bewegung der festen Körper gehandelt wird; be-

trift sie aber die Bewegung der fliessigen Körper, sonderlich des Wassers, so heist sie die Hydraulik, und wenn die Luft ihr Gegenstand ist, die Aerometrie. Betrachtet man an den Körpern nur ihr Gleichgewicht gegen einander, so wird diese Wissenschaft bei den festen Körpern die Statik, und bei den fliessigen die Hydrostatik genent.

§. 20. Um die Bewegungen in verschiedenen Fällen nach gewissen Absichten einzurichten, bedienet man sich gewisser Rüstzeuge, Machinen, durch die man entweder an der bewegenden Kraft, oder an der Zeit niemals aber an beiden zugleich gewinnet, oder verlieret. Sie werden in die Einfache und Zusammengesezte eingeteilet. Die erstere bestehen nur aus etwelchen wenigen, die Anzahl der andern aber ist so gros, als die Absichten und ihr Gebrauch verschieden sind, doch wird unter allen keine gefunden, welche nicht aus den Einfachen zusammengesezt wäre.

Einteilung des gegenwärtigen Werkes:

Erster Abschnit. Von der Bewegung der festen Körper.

Erstes Hauptstück. Von der einfachen und gleichförmigen Bewegung.

Zweites Hauptstück. Von der zusammengesezten gleichförmigen Bewegung.

Drittes Haupstück. Von der zu und abnehmenden Bewegung, oder von dem Falle der Körper sowohl senkrecht als über schiefe Flächen.

Viertes Hauptstück. Von geworfenen Körpern.

Fünftes Hauptstück. Von dem Stose der Körper.

Sechstes Hauptstück. Von dem Schwerpunkt.

Er=

Erster Abschnit.

Von der Bewegung der festen Körper.

Erstes Hauptstück.

Von der einfachen und gleichförmigen Bewegung.

Lehrsaz.

§. 21.

Die Geschwindigkeiten zweener gleichförmig bewegten Körper verhalten sich wie die durchlofene Räume dividirt durch die Zeiten, so bei der Bewegung verwendet worden.

Beweis: Es sei die Geschwindigkeit des ersten Körpers = C; die des andern = c; der durchlofene Raum des ersten = S; der des andern = s; die Dauerzeit der Bewegung des ersten = T und die des andern = t.

Da nun die Geschwindigkeit in der gleichförmigen Bewegung allezeit gleich bleibt, §. 12, und dieselbe das Verhältnis des Raumes zu der Zeit ist §. 11,

so

so ist $C = S : T$, und $c = s : t$, oder vielmehr $C = \frac{S}{T}$ und $c = \frac{s}{t}$; folglich ist

$$C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$$

Zusaz.

§. 22. Bringet man obige zween Brüche $\frac{S}{T}$ und $\frac{s}{t}$ auf einerlei Benennung nach §. 88. Rechenk.: so bekomt man

$$C : c = \frac{St}{Tt} : \frac{sT}{Tt}.$$

und folglich ist $C : c = St : sT$, §. 215. Rechenk. d. i. die Geschwindigkeiten zweener gleichförmig bewegten Körper stehen in zusammengesezter Verhältnis der durchlosenen Räume und Zeiten, und zwar in gerader der ersten, und umgekehrter der andern.

Z. B. Der in einer Zeit von 8 Sekunden durchlosene Raum eines gleichförmig bewegten Körpers sei = 152 Sch., der eines andern in 6 Sekunden = 96 Sch.; und die Geschwindigkeit des erstern werde durch die Zahl 76 ausgedruckt, und man verlangte die Geschwindigkeit des andern zu wissen, so kan man sie nach obigen Zusaz finden, denn wenn man die vorige Benennung beibehält, so ist $St : sT = C : c$

folglich $\frac{sTC}{St} = c$

d. i. $\frac{96 \times 8 \times 76}{152 \times 6} = 64 = c.$

Zu-

Zusatz.

§. 23. Multiplicirt man die äussere und mittlere Sätze der obigen Proportion $C : c = St : sT$

so bekomt man $CsT = cSt$,

und löset man diese Gleichung in folgende Proportion auf: $T : t = cS : Cs$, so ist klar, daß die Zeiten in zusammengesetzter Verhältnis der Geschwindigkeiten und Räume, und zwar in umgekehrter der ersten, und in gerader der andern stehen.

Z. B. wenn ein Körper in einer Zeit von 4 Sekunden mit einer Geschwindigkeit wie 12 einen Raum von 62 Sch. durchlauft, und ein anderer wird mit einer Geschwindigkeit wie 8 auf 40 Sch. getrieben, und man verlangt die Zeit, so dieser Körper zur Bewegung brauchen wird, zu wissen, so ist nach obiger Benennung

$$cS : Cs = T : t$$

und $$\frac{CsT}{cS} = t$$

d. i. $$\frac{12 \times 40 \times 4}{8 \times 62} = 3\frac{27}{31} = t.$$

Zusatz.

§. 24. Zerleget man obige Gleichung $CsT = cSt$ in folgende Proportion, $S : s = CT : ct$, so erhellet, daß die Räume in zusammengesetzter gerader Verhältnis der Geschwindigkeiten und Zeiten sind.

Z. B. Wenn ein Körper mit einer Geschwindigkeit wie 16 auf 200 Sch. in 6 Sekunden gelanget, ein anderer aber mit einer Geschwindigkeit wie 12 nur 4 Sekunden bewegt wird, wie weit wird er sich in dieser Zeit bewegen?

Weil nach obiger Benennung $CT : ct = S : s$

und $\frac{ctS}{CT} = s.$

So ist $\frac{12 \times 4 \times 200}{16 \times 6} = 100$ Sch. $= s.$

Zusatz.

§. 25. Nimt man an, daß in der Proportion $C : c = St : sT$ die Geschwindigkeiten gleich, d. i. daß $C = c$ sei, so sind auch $St = sT$ §. 206. Rechenk. und diese Gleichung in eine Proportion aufgelöst, giebt.

$$S : s = T : t.$$

D. i. Wenn zween gleichförmig bewegte Körper gleiche Geschwindigkeiten haben, so verhalten sich ihre durchlosene Räume wie die Zeiten.

Z. B. Zwo Trouppen marschiren mit gleicher Geschwindigkeit gegen einem Orte; die erste ist 600 Schritte entfernt, und braucht 10 Minuten um dahin zu kommen, die andere aber hat nur 250 Schritte zu machen; man verlangt zu wissen wie viel Zeit sie nöthig haben wird?

Weil also vermög der Bedingung die Geschwindigkeiten beider Trouppen gleich sind,

so ist $S : s = T : t$

und folglich $\frac{sT}{S} = t$

oder $\frac{250 \times 10}{600} = 4\frac{1}{6}$ Minuten $= t.$

Zusatz.

§. 26. Wären in der Proportion $S : s = CT : ct$ $S = s$, so würde auch $CT = ct$ sein §. 206. Rechenk.

chenk. und wird diese Gleichung in folgende Proportion $C : c = t : T$ aufgelöst, so siehet man, daß, wenn in der gleichförmigen Bewegung zweener Körper die Räume gleich sind, die Geschwindigkeiten in verkehrter Verhältnis der Zeiten stehen.

Z. B. zwo Trouppen sind gleichweit von einem Orte entfernet; die erste marschirt in 15 Minuten dahin, indem sie 50 Schritte in einer Minute machet; die andere aber machet in einer Minute 60 Schritte, wie viel wird sie also Zeit nöthig haben, um dahin zu kommen? Weil die Entfernungen beider Trouppen gleich sind, und man ihre in einer Minute gemachten Schritte als ihre Geschwindigkeiten ansehen kan,

so ist $C : c = t : T$

und $\frac{CT}{c} = t$

d. i. $\frac{50 \times 15}{60} = 12\frac{1}{2} = t$

Zusatz.

§. 27. Wenn in der Proportion $T : t = cS : Cs$ die ersten zween Sätze $T = t$, so sind es auch die andere zween $cS = Cs$, und löset man sie in folgende Proportion auf,

$$S : s = C : c$$

so erhellet, daß, wenn in der gleichförmigen Bewegung die Zeiten gleich sind, sich die Räume wie die Geschwindigkeiten verhalten.

Z. B. zwo Trouppen sollen zu gleicher Zeit in einem Orte, der von der ersten 780, und von der zwoten 420 Schritte entfernet ist, eintreffen; die erste machet in einer Minute 66

 Schrit-

Schritte; man fragt wie viele Schritte die andere in der nemlichen Zeit zu machen habe?

Da nun nach obiger Benennung $S : s = C : c$ so ist $\frac{sC}{S} = c$ oder $\frac{420 \times 66}{780} = 35 \frac{7}{13} = c$ Sind übrigens in der gleichförmigen Bewegung so wohl die durchlofene Räume, als auch ihre Geschwindigkeiten gleich, so müssen es auch die Zeiten sein. Sind die Räume und Zeiten gleich, so sind es auch die Geschwindigkeiten, und wären die Geschwindigkeiten und Zeiten gleich, so würden es auch die Räume sein.

Lehrsaz.

§. 28. Die Kräfte der Bewegung zweener gleichförmig bewegten Körper stehen in einer zusammengesezten Verhältnis ihrer Geschwindigkeiten und Massen.

Beweis: Wenn man die Kraft der Bewegung des ersten Körpers mit Q, seine Masse mit M, und die Geschwindigkeit mit C, die Kraft des andern mit q, seine Masse mit m, und seine Geschwindigkeit mit c benennet, so ist

$$Q = MC, \text{ und } q = mc$$

und also $Q : q = MC : mc$.

Zusaz.

§. 29. Nimt man die Geschwindigkeiten $C = c$ an, so ist $Q : q = M : m$. §. 215. Rechenk. d. i. wenn die Geschwindigkeiten gleich sind, so verhalten sich die Kräfte der Bewegung wie die Massen. Sezet man aber voraus, daß die Massen gleich, so ist $Q : q = C : c$, oder die Kräfte verhalten sich wie die Geschwindigkeiten.

Zu-

Zusatz.

§. 30. Im Falle die Kräfte der Bewegung zweener Körper gleich wären, d. i. wenn $Q = q$ so ist auch $MC = mc$ §. 215. Rechenk. und löset man diese Gleichung in folgende Proportion auf, $M : m = c ; C$, so erhellet, daß die Massen in verkehrter Verhältnis der Geschwindigkeiten stehen.

Die Anfänger werden einsehen, daß man obstehende Proportion noch vielmal verändern könne, wenn man anstaat der Geschwindigkeiten die ihnen gleiche Verhältnisse $\frac{S}{T} ; \frac{s}{t}$ setzet. Wir übergehen sie daher mit Stilschweigen.

Ubrigens, obwohl in der Natur der Schärfe nach vielleicht keine ganz gleichförmige Bewegung staat findet, so kan man doch die ungleichförmige in sehr kleinen Zeiten ohne merklichen Fehler als gleichförmig betrachten; so wie man in der Geometrie einen Zirkel öfters als ein Polygon von unendlich vielen Seiten ansiehet.

Zweites Hauptstück.

Von der zusammengesetzten gleichförmigen Bewegung.

Grundsätze.

I.

§. 31. Wenn zwo Kräfte in einem Körper zugleich und nach einerlei Richtung würken, so ist ihre

gesamte Würkung der Summe der Kräften gleich, und der Körper wird sich nach der nehmlichen Richtung bewegen.

Z. B. Wenn zween Männer eine Last an einem Stricke nach einerlei Richtung ziehen, so werden sie eine so grosse Last miteinander bewegen, als die Summe zwoer Lasten ist, die ieder insbesondere bewegen könte.

2.

Wenn zwo gleiche Kräfte in einen Körper nach entgegengesetzten Richtungen würken, so heben sie sich ganz auf, und der Körper verbleibt in Ruhe.

Z. B. Wenn ein Man eine Last an einem Stricke ziehet, und ein anderer von gleicher Stärke eben so viel nach der entgegengesetzten Seite ziehet, so wird einer des andern seine Kraft vernichten, und der Körper in Ruhe bleiben.

3.

Wenn zwo ungleiche Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen auf einen Körper würken, so hebt sich die kleinere ganz auf; die grössere aber wird um so viel kleiner, als die kleinere betragen hat, und der Körper bewegt sich alsdenn nach der Richtung der grössern.

Z. B. Wenn drei Männer nach einer Richtung an einem Stricke ziehen, und nur einer entgegen haltet, so wird die Kraft des leztern ganz aufgehoben, die Kraft der drei Männer aber ist alsdenn nur so gros als die von zween, und diese werden den einen nach sich ziehen.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 32. Wenn die Richtungslinien AB und AC zwoer mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einen Körper A würkenden Kräften P und Q was immer für einen Winkel BAC machen, so folget der bewegte Körper keiner von beiden Richtungen, sondern beschreibet die Diagonal AD eines Parallelograms ACDB, dessen Seiten AB und AC die Räume vorstellen, so der Körper von ieder Kraft allein bewegt in einer gewissen Zeit durchliefe. Fig. I.

Beweis: Teilet die Räume AB und AC ieden in eine gleiche *Anzahl Teile*, und sehet dieselbe als die *Räume an*, die der Körper von einer Kraft allein *getrieben in unendlich* kleinen Zeiten durchlaufen würde. *Ferner ziehet aus* den Teilungspunkten EFGB zu AC, und *aus* HILC zu AB Parallelen, und betrachtet, daß der Körper A durch die Kraft P allein bewegt, nach der ersten unendlich kleinen Zeit in E, nach der zwoten in F, nach der dritten in G, und nach der vierten in B sein würde; und wenn er durch die Kraft Q *allein getrieben* würde, so müste sich derselbe nach der ersten Zeit in H, nach der zwoten in I, nach der dritten in L, und nach der vierten in C befinden. Da wir nun annehmen, daß beide Kräfte zugleich in ihn würken, so wird er nach der ersten Zeit durch die Kraft Q von der Richtung AB um AH = EM, nach der zwoten um AI = FN, nach der dritten um AL = GO, und nach der vierten um AC = BD abgetrieben werden; eben so bringt ihn die Kraft P von der Richtung AC nach der ersten Zeit um AE = HM, nach der zwoten um AF = IN, nach der dritten um AG = LO, und nach der vierten um AB = CD ab; folglich wird sich der Körper nach der ersten Zeit in

 M,

M, nach der zwoten in N, nach der dritten in O, und nach der vierten in D befinden; diese Punkten aber sind auf der Diagonal AD des Parallelograms ACDB, dessen Seiten die durchlosenen Räume der einzelnen Kräften vorstellen, also wenn die Richtungslinien zwoer mit gleichförmiger Geschwindigkeit würkenden Kräften einen Winkel machen, so folget der bewegte Körper keiner der beiden Richtungslinien, sondern beschreibet die Diagonal des Parallelograms ACDB, dessen Seiten die Räume der einzelnen Kräften vorstellen.

Zusaz.

§. 33. Da die Diagonal AD den Raum vorstellet, welchen der Körper A von den zwo zusammengesezten Kräften getrieben durchlaufen wird, und dieselbe grösser als iede der Seiten AB oder CD des Parallelograms, aber doch kleiner als ihre Summe ist, so folget, daß der Körper von den zusammengesezten Kräften getrieben einen grössern Raum als durch eine allein, aber auch einen kleinern, als wenn er durch beide Kräften nach einerlei Richtung bewegt würde, durchlaufen müsse. Es mus sich daher bei nach verschiedenen Richtungen zusammengesezten Kräften ein Teil derselben verlieren, oder aufheben,

Zusaz.

§. 34. Weil der Körper A durch die zusammengesezten Kräften P und Q in der nehmlichen Zeit den Raum AD durchlauft, als er von einer Kraft allein getrieben den Raum AB oder AC durchliefe, so verhalt sich die von der einfachen Kraft P oder Q erlangte Geschwindigkeit zu der durch die Zusammensezung derselben überkommenen, wie die durchlofenen Räume §. 27. d. i. wenn die Geschwindigkeit von der Kraft P = C,

die von Q = c, und die von den zusammengesetzten Kräften = X wäre, so ist

$$C : X = AB : AD$$

und $$c : X = AC : AD,$$

Man kan also die Seiten und die Diagonal des Parallelograms als die Verhältnis der Geschwindigkeiten ansehen.

Zusatz.

§. 35. Je spitziger der Winkel BAC ist, den die Richtungslinien der zusammengesetzten Kräften machen, ie länger wird auch die Diagonal AD des Parallelograms, und folglich ie weiter wird auch der Körper durch die zusammengesetzte Kräften getrieben, oder um so grössere Geschwindigkeit erhält er. Je stumpfer aber der Winkel BAC ist, ie kürzer wird die Diagonal; der Körper durchlauft in solchem Falle einen um so kleinern Raum, und seine Geschwindigkeit wird um so geringer. Fig. 2. und 3.

Zusatz.

§. 36. Da die Würkung zwoer Kräften durch die Diagonal ausgedruckt werden kan, so lassen sich zwo zusammengesetzte Kräfte als eine, oder diese als aus zwoen zusammengesetzt betrachten.

Aufgabe.

§. 37. Wenn der Winkel der Richtungslinien zwoer Kräften nebst dem Raume, den der von ieder Kraft insbesondere getriebene Körper durchlaufen würde, gegeben, wie der Raum zu finden, den er durch diese zwo Kräfte zugleich getrieben beschreiben wird?

Fig. 1. 2. 3. Auflösung: 1. Zeichnet den gegebenen Winkel BAC der Richtungslinien; machet AB und AC den gegebenen Räumen gleich, welche der Körper durch iede Kraft allein durchlaufen würde, ziehet CD = AB parallel zu AB, und auch die Diagonal AD.

2. Ist nun der Winkel BAC = 90° so ist $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$. Geomet. §. 182.

folglich $\sqrt[2]{\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2} = AD$. §. 183. Geomt.

3. Ist aber der Winkel BAC spitzig, oder stumpf, so beschreibet das Parallelogram wie zuvor, und betrachtet, daß euch der Winkel BAC gegeben, und BAC + ACD = 180° §. 54. Geomet. folglich 180° — BAC = ACD sei. Da nun auch CD = AB ist, so kennet ihr in dem Dreiecke ACD die zwo Seiten AC und CD samt dem darzwischen begrifenen Winkel, folglich findet ihr die Seiten AD als den verlangten Raume §. 440. Geomet.

Stellen die Linien AB und AC die Geschwindigkeiten vor, so erhält man die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Kraft auf die nehmliche Art.

Aufgabe.

§. 38. Wenn mehrere Kräfte zugleich und in verschiedenen Richtungen auf einen Körper würken, wie dessen andurch erhaltene Richtung sowohl als seine Geschwindigkeit, oder der Raum den er durchlaufen wird, zu bestimmen?

Fig. 4. Auflösung: 1. Setzet die gegebene Richtungslinien AB, AD, AF und AH in den Winkeln zusammen als sie auf den Körper würken, und gebet denselben die

Län-

Länge des Raumes oder der Geschwindigkeit, so von ieder einzelnen Kraft beschrieben, oder hervorgebracht wird.

2. Ziehet BC parallel zu AD und CD zu AB, so stellet die Diagonal AC die Richtung vor, so aus den zwo einfachen Kräften AB und AD erfolget; d. i. wenn AB, und AD die Räume oder Geschwindigkeiten der einzelnen Kräften vorstellen, so ist AG der Raum oder die Geschwindigkeit der zwo zusammengesetzten §. 32.

3. Ziehet FG parallel zu AH, und HG zu AF, so ist die Diagonal AG die Richtung, so aus der Zusammensetzung der zwo einfachen AF und AH erfolget, und wenn AF und AH die Räume oder Geschwindigkeiten der einzelnen Kräften vorstellen, so ist auch AG der Raum oder die Geschwindigkeit der zwo zusammengesetzten Kräften. §. 32., und man kan also die vier gegebenen Richtungen, Räume oder Geschwindigkeiten als zwo, nehmlich als AC und AG betrachten.

4. Ziehet CE parallel zu AG, und EG zu AC, so ist die Diagonal AE die Richtung, der Raum, oder die Geschwindigkeit der zwo zusammengesetzten AC und AG §. 32. oder vielmehr von allen vieren gegebenen.

Zusatz.

§. 39. Wolte man die Diagonal AE berechnen, so hat man erstlich AC und AG, und denn aus beiden AE nach §. 37. zu suchen.

Aufgabe.

§. 40. Wenn mehrere Kräfte, deren Richtungslinien in verschiedenen Flächen liegen, in einen Körper würken, wie die dadurch erhaltene Richtung sowohl,

als

als der Raum oder die erlangte Geschwindigkeit zu finden?

Fig. 5. Auflösung: Es sei, daß der Körper A nach den drei in verschiedenen Flächen liegenden Richtungen AC, AD und AB zugleich getrieben werde, so beschreibet erstlich mittelst den zwo Richtungen AC und AD das Parallelogram ACED um die Diagonal AE zu erhalten. Ferner beschreibet mit den zwo Richtungslinien AE und AB das Parallelogram AEFB, so ist die Diagonal AF die verlangte Richtung, und drücket entweder den Raum oder die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Kraft aus, nachdem die Seiten des Parallelograms eines oder das andere vorstellen. §. 33.

Lehrsatz.

Fig. 6. §. 41. Die züsammengesetzte Kraft AH verhält sich zu einer der einfachen AB, wie der Sinus BX des Winkels BAC zum Sinus DS des Winkels CAH, und die zwo einfache Kräfte AB und AC verhalten sich zu einander wechselweise wie die Sinusse BO und DS der Winkel BAH und CAH, die ihre Richtungslinien BA und CA mit der Diagonal AH machen.

Beweis: Die Geschwindigkeiten, so durch AB, AC und AH vorgestellet werden, verhalten sich wie die Räume §. 27., und da die Masse des Körpers A beständig die nehmliche verbleibt, so sind auch die Kräfte wie die Geschwindigkeiten, oder Räume §. 29. D. i. wie die Seiten des Dreiecks ACH, weil AB = CH; die Seiten dieses Dreiecks aber verhalten sich wie die Sinusse ihrer entgegenstehenden Winkel, also verhalten sich auch die Kräfte wie die Sinusse der ihnen entgegenstehenden Winkel; d. i. die Kraft AH ist zu AB oder CH, wie der Sinus HY des Winkels

ACH

ACH zum Sinus DS des Winkels CAH. Nun aber ist der Sinus HY des Winkels ACH gleich dem Sinus BX des Winkels BAC, weil er das Komplement auf 180° ist; also ist auch

AH : AB oder CH = Sin. BX von BAC : Sin. CS von CAH.

Nicht minder ist:

AH : AC oder BH = Sin BX von BAC : Sin BO von BAH.

Endlich weil:

AH : CH = Sin BX von BAC : Sin DS von CAH.

Und:

AH : AC = *Sin BX von* BAC : Sin von AHC = *Sin* BO *von* BOH

so ist *auch*

AC : CH oder AB = Sin BO von BAH : Sin DS von CAH.

Drittes Hauptstück.

Von der zu= und abnehmenden Bewegung, oder von dem Falle der Körper sowohl senkrecht als über schiefe Flächen.

Lehrsatz.

§. 42. In der gleichförmig zunehmenden oder beschleinigten Bewegung verhalten sich die durchlofenen Räumen wie die Quadrate der Zeiten, die dazu verwendet werden,

Raum dem Parallelogram AEXN gleich. §. 12. bewegt sich derselbe aber mit gleichförmig beschleinigter Bewegung in der nehmlichen Zeit AE, und erhält am Ende derselben die Geschwindigkeit EX, so ist sein durchlosener Raum dem Dreieck AEX gleich. Da aber letzteres nur die Hälfte von dem erstern ist, so wird auch ein gleichförmig bewegter Körper einen dopelt so grossen Raum beschreiben, als einer in der nehmlichen Zeit mit gleichförmig beschleinigter Bewegung dessen Geschwindigkeit am Ende der Bewegung eben so gros wie die vorige wäre, thun würde.

Lehrsaz.

§. 45. Die mit gleichförmig beschleinigter Bewegung in gleichen auf einander folgenden Zeiten durchlosenen Räume wachsen wie die ungerade Zahlen 1. 3. 5. 7. u. s. w.

Beweis: Der in der ersten Zeit AB durchlosene Raum ist = ABL, der in der zwoten samt der ersten oder AC ist = ACO, und der in der dritten samt der ersten und zwoten oder AD ist = ADI §. 42. ziehet man nun den in der ersten Zeit der Bewegung durchlosenen Raum ABL von dem von Anfang der Bewegung bis zum Ende der zwoten Zeit durchlosenen oder von ACO ab, so verbleibt der in der zwoten Zeit allein durchlosene Raum oder das Trapezium BCOL übrig, und ziehet man den in der ersten und zwoten Zeit durchlosenen Raum ACO von dem von Anfang der Bewegung bis zum Ende der dritten Zeit durchlosenen Raum ADI ab, so verbleibt der in der dritten Zeit allein durchlosene Raum oder das Trapezium CDIO übrig. Nimt man nun das Dreieck ABL wie 1 an, so ist klar, daß das Trapezium BCOL wie 3, und das Trapezium CDIO wie 5 ist, indem sie würklich

aus

aus so vielen Dreiecken wie das erste ist, bestehen. Diese Trapezien aber stellen die Räume der aufeinander folgenden Zeiten vor, also wachsen die in gleichen aufeinander folgenden Zeiten durchlofenen Räume wie die ungerade Zahlen 1. 3. 5. 7. u. s. w.

Alles was wir bisher von der gleichförmig beschleinigten Bewegung erwiesen haben, läst sich auch auf die gleichförmig gehemte aber nur in umgekehrter Ordnung anwenden.

Erfahrung.

§. 46. Ein schwerer Körper der ungehindert gegen dem Mittelpunkte der Erde fallet, hat eine gleichförmig beschleinigte Bewegung. Die Ursache hievon ist, weil seine Schwere ihm alle Augenblick einen neuen Grad der Geschwindigkeit beibringt, und folglich solche in gleichen Zeiten gleichviel vermehrt.

Züsatz.

§. 47. Alles also, was wir von der gleichförmig beschleinigten Bewegung erwiesen haben; hat auch seine Beziehung auf den freien Fal der schweren Körper gegen den Mittelpunkt der Erde. D. i. die durchfallenen Räume verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten, oder der Geschwindigkeiten; die Zeiten oder Geschwindigkeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Räume; die Räume wachsen in gleichen aufeinander folgenden Zeiten wie die ungerade Zahlen 1. 3. 5. 7. u. s. w.

Der berühmte Naturkündiger Galilæus war der erste, der über den Fal der schweren Körper ordentliche Versuche anstelte; dem wir folglich dieses Gesetz der Bewegung zu verdanken haben.

Da aber so wohl er, als seine Nachfolger diese Versuche nur in respektive kleinen Höhen vornehmen konten, so ist man bis izo noch nicht vollkommen versichert, ob die Vermehrung der Geschwindigkeit auch bei grössern Höhen nach eben dem Gesetze geschiehet?

Erfahrung.

§. 48. Durch genau angestelte Versuche weis man, daß ein schwerer frei und ungehindert fallender Körper in der ersten Sekunde 15 Schuhe 1 Zoll und $\frac{1}{18}$ Linie Parisermaas herunter falle; weil aber die Luft einige Verhindernis machet, so nimt man insgemein an, daß der Fal in der ersten Sekunde nur 15 Schuh tief sei.

Aufgabe.

§. 49. Ein Körper braucht 4 Sekunden um über eine Höhe frei herab zu fallen, man fragt, wie gros die Höhe wäre?

Auflösung: Vermög §. 48. fallet ein Körper in der ersten Sekunde 15 Schuh, und vermög §. 42. verhalten sich die durchfallene Räume wie die Quadrate der Zeiten. Derowegen ist:

$$1 : 16 = 15 : x$$

und $\frac{16 \times 15}{1} = 240$ Sch. $= x$ der Höhe.

Aufgabe.

§. 50. Man verlangt zu wissen, in wie viel Zeit ein Körper von einer gegebenen Höhe frei fallen werde?

Auf-

Auflösung: Es sei die gegebene Höhe = 450 Schuh; nebst deme ist bekant, daß ein Körper in der ersten Sekunde 15 Schuh fallet. §. 48. Da sich nun die Zeiten wie die Quadratwurzeln der Räume verhalten, §. 43.

so ist $\sqrt[2]{15} : \sqrt[2]{450} = 1$ Sek. x

oder wenn man das Maas der Räume in Linien zerfället, und die Wurzeln würklich auszichet:

$$46 : 254 = 1 : x$$

und $\frac{254}{46} = 5\frac{12}{23}$ Sekunden $= x$.

oder man setzet: wie sich die Höhe, die der Körper in der ersten Sekunde durchfallet zu der gegebenen Höhe verhält, eben so verhält sich das Quadrat von einer Sekunde zu dem Quadrat der gesuchten Zeit §. 42. wo man alsdann aus dem vierten Satze die Wurzel auszuziehen hat.

Eben auf diese Art würde man beide Aufgaben auflösen können, wenn anstaat der Zeit die Geschwindigkeit des fallenden Körpers gegeben, oder gesucht würde.

Lehrsatz.

§. 51. Ein Körper, der durch was immer für eine Kraft senkrecht in die Höhe getrieben wird, erhält eine gleichförmig gehemte Bewegung, wenn die Luft keine Hindernis machte.

Beweis: Betrachtet das die Schwere des Körpers der treibenden Kraft gerade, und beständig entgegen würket, und weil diese Würkung immer gleich stark ist, so mus auch die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleich viel abnehmen, und also nothwendig eine gleichförmig gehemte Bewegung entstehen.

Zusatz.

§. 52. Wenn also ein Körper senkrecht in die Höhe getrieben wird, und anfangs eine gewisse Geschwindigkeit durch die treibende Kraft erhält, so wird dieselbe wie die Zeiten zunehmen, abnehmen, und endlich gänzlich aufhören; der Körper wird alsdann einen Augenblick gleichsam in der Ruhe zu sein scheinen, weil die treibende Kraft damals ganz überwunden ist. In eben diesen Augenblick aber würket die Schwere allein in ihn, und suchet denselben wieder abwärts zu treiben. Die Geschwindigkeit nimt alsdann wieder eben so zu, wie sie beim Aufsteigen abgenommen hat, und wenn der Körper in dem Ort, wo seine steigende Bewegung angefangen hat, gekommen ist, so ist seine wieder erlangte Geschwindigkeit bei nahe wieder eben so gros, als sie zu vor durch die treibende Kraft ware. (Ich sage mit Recht bei nahe, weil sie durch den Widerstand der Luft allezeit etwas geringer befunden wird, als sie vermög diesem Gesetze sein solte) daher werden die verlornen Geschwindigkeiten wie die Zeiten; die noch zu durchlaufenden Räume bis zur grösten Höhe wie die Quadrate der noch vorhandenen Geschwindigkeiten, oder der noch nöthigen Zeiten sich verhalten, ferners die in einzeln aufeinander folgenden Zeiten durchlofenen Räume oder erreichten Höhen werden wie die ungeraden Zahlen abnehmen. Endlich wird ein senkrecht in die Höhe getriebener schwerer Körper nur die Hälfte so hoch steigen, als er stiege, wenn er mit der anfänglich erhaltenen Geschwindigkeit gleichförmig bewegt würde, oder wenn die Schwere seine Bewegung nicht hemte.

Erfahrung.

§. 53. Zween freifallende Körper von ungleichen Massen durchlaufen, wenn ihnen die Luft gleich viel,

oder

oder gar nicht widerstehet, in gleichen Zeiten gleiche Räume.

Eine hundert pfündige Bombe würde also in einem luftleeren Raume in einer Zeit z. B. von 2 Sekunden eben nicht tiefer als eine dreipfündige Granaden, oder hölzerne Kugel fallen. Wird dieser Versuch in der freien Luft angestellet, so zeiget sich zwar an den in gleichen Zeiten durchfallenen Räumen einiger Unterschied, er ist aber dem Unterschied der Massen nicht proportionirt, sondern viel kleiner. Es ist daher klar, daß er nicht von der Verschiedenheit der Massen, sondern von dem Widerstand der Luft herrührt.

Zusatz.

§. 54. Weil die Geschwindigkeiten sich wie die Zeiten verhalten, so werden zween freifallende Körper von ungleichen Massen in gleichen Zeiten auch gleiche Geschwindigkeiten erhalten, und wenn sich in der freien Luft einiger Unterschied zeiget, so komt derselbe von dem Widerstand der Luft, keineswegs aber von der Verschiedenheit der Masse her.

Lehrsatz.

§. 55. Die durch den Falle erlangten Kräfte eines Körpers verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Höhen.

Beweis: Es sei die Masse des Körpers $= M$; eine Tiefe seines Falles $= S$, und die andere $= s$; die in der ersten erlangte Geschwindigkeit $= C$, und die in der andern $= c$.

Nun betrachtet, daß $MC : Mc = C : c$ §. 29.

nicht minder ist $C : c = \sqrt[2]{S} : \sqrt[2]{s}$. §. 43.

 also

also ist auch $MC : Mc = \sqrt[2]{S} : \sqrt[2]{s}$. §. 204. Rechenkunst.

Zusatz.

§. 56. Um also die Kraft der Bewegung, so ein freifallender Körper in einer gewissen Höhe erhalten, auszudrücken, mus man sein Gewicht, oder Masse durch die Quadratwurzel der durchfallenen Höhe multipliciren.

* Es verstehet sich von selbsten, daß man um die Kraft der Bewegung eines freifallenden Körpers zu bestimmen, nach der leibnitzischen Meinung das Gewicht oder die Masse durch die Höhe selbst multipliciren müsse.

Erklärung.

§. 57. Wenn eine Fläche mit dem Horizont einen Winkel machet, so wird sie eine schiefliegende Fläche genent.

Beobachtung.

§. 58. Ein schwerer Körper bewegt sich langsamer über eine schiefliegende Fläche, als wenn er frei und senkrecht von der nehmlichen Höhe herab fiele.

Zusatz.

§. 59. Es muß also die Schwere bei dem Falle eines Körpers über eine schiefe Fläche ihre ganze Würkung nicht machen können, sondern ein Teil derselben gleichsam verloren gehen, oder in die Fläche selbst würken.

Be-

Beobachtung.

§. 60. Die Geschwindigkeit eines über eine schiefliegende Fläche herablaufenden Körpers nimt allezeit mehr und mehr zu.

Zusaz.

§. 61. Da das Zunehmen der Geschwindigkeit eines über eine schiefliegende Fläche fallenden Körpers von keiner andern Ursache als von der Schwere herkommen kan, und diese, so als wenn er senkrecht herabfiele, alle Augenblick in ihn würket, und demselben beständig neue und gleiche Grade der Geschwindigkeit beibringet §. 46. so mus derselbe nothwendig eine gleichförmig vermehrte Bewegung erhalten.

Zusaz.

§. 62. Alles, was von dem freien und senkrechten Falle der Körper erwiesen worden, hat also auch seine Beziehung auf den Fal derselben über schiefliegende Flächen: d. i. die auf der schiefen Fläche durchlofene Räume verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten, oder Geschwindigkeiten; und diese wie die Quadratwurzeln der Räume. Die Räume wachsen in gleichen aufeinander folgenden Zeiten wie die ungerade Zahlen 1. 3. 5. 7. 9. u. s. w.

Zusaz.

§. 63. Eben wie ein über eine schiefliegende Fläche fallender Körper eine gleichförmig vermehrte Bewegung erhält, so erhält er eine gleichförmig gehemte, wenn er über eine schiefliegende Fläche durch eine Kraft hinauf bewegt wird. Folglich läst sich hier eben das, was §. 51. u. s. w. gesagt worden, auf gleiche Art anwenden.

Erklärung.

§. 64. Das ungebundene Vermögen der Schwere (Gravitas absoluta) ist dasienige, welches der Körper, wenn er senkrecht und frei herabfallet, ausübet. Das würkliche Vermögen der Schwere aber (Gravitas respectiva) ist ienes, welches er noch hat, wenn seine Schwere zum Teil verhindert wird ihre ganze Würkung zu machen. Z. B. wenn der Körper über eine schiefliegende Fläche fält.

Lehrsaz.

§. 65. Die Geschwindigkeit, welche ein senkrecht fallender Körper am Ende seines Falles erreichet, verhält sich zur Geschwindigkeit, die er über eine schiefliegende Fläche fallend erhielte, wie die Länge der schiefliegenden Fläche zu ihrer Höhe.

Fig. 8. Beweis: Wenn man aus dem Schwerpunkte A des fallenden Körpers eine Perpendikular AC auf CF ziehet, dieselbe als das ungebundene Vermögen der Schwere oder als die Kraft des Körpers, welche er durch seinen senkrechten Fal erhält, ansieht, und sie in zwo andere Kräfte, wovon eine auf die schiefe Fläche perpendikular wie AD oder BC, die andere AB aber zu derselben parallel ist, zergliedert, §. 36. so wird die Kraft der Schwere, mit welcher der Körper gegen die schiefe Fläche würket, und an derselben gleichsam verloren gehet, durch AD, die Kraft aber, welche noch übrig bleibt, und mit welcher der Körper würklich über die schiefe Fläche laufet, durch AB ausgedrückt, und es verhält sich das ungebundene Vermögen der Schwere, welches der Körper senkrecht fallend hätte, zu dem würklichen Vermögen oder zu der Kraft, mit der er über die schiefliegende Fläche fält, wie AC : AB. Nun

aber

aber ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und EFC : AC : AB = CE : EF, D. i. die Kraft des senkrecht fallenden Körpers verhält sich zu der, so er über eine schiefe Fläche fallend erhielte, wie die Länge der schiefliegenden Fläche zu ihrer Höhe, und da die Masse des Körpers die nehmliche zu sein angenommen wird, so sind die Kräfte wie die Geschwindigkeiten §. 29. Also verhält sich auch die Geschwindigkeit, welche ein senkrecht fallender Körper am Ende seines Falles erreichet, zur Geschwindigkeit, die er über eine schiefe Fläche fallend erhielte, wie die Länge der Fläche zu ihrer Höhe.

Zusatz.

§. 66. Siehet man CE als den Sinus Totus, und EF als den Sinus des Winkels, den die schiefliegende Fläche mit dem Horizont machet, an, so kan man auch sagen, daß die Geschwindigkeit eines senkrecht gefallenen Körpers zu der Geschwindigkeit, die er über eine schiefe Fläche von eben der Höhe erhielte, sich wie der Sinus Totus zum Sinus des Winkels, welchen die schiefe Fläche mit dem Horizont machet, verhalte.

Lehrsatz.

§. 67. Der beschriebene Raum eines senkrecht fallenden Körpers verhält sich zu dem Raume eines in der nehmlichen Zeit über eine schiefe Fläche laufenden Körpers wie die Geschwindigkeit des erstern zu der des andern.

Beweis: Wenn sowohl der senkrecht als der über eine schiefe Fläche fallende Körper im Anfange seiner Bewegung die Geschwindigkeit, so er durch die beschleinigte Bewegung am Ende seines Falles erhalten, ge-

 habt

habt hätte, so würde er in der nehmlichen Zeit mit dieser Geschwindigkeit mit gleichförmiger Bewegung einen dopelt so grossen Raum beschreiben, §. 44. Nun aber verhalten sich in der gleichförmigen Bewegung die Räume wie die Geschwindigkeiten, wenn die Zeiten gleich sind §. 27. also verhalten sich auch die dopelte und folglich auch die einfache Räume wie die am Ende des Falles erlangte Geschwindigkeiten, und also ist der beschriebene Raum eines senkrecht fallenden Körpers zu dem Raum eines in der nehmlichen Zeit über eine schiefe Fläche laufenden wie die Geschwindigkeit des ersten zu der des andern.

Zusaz.

§. 68. Da sich die Geschwindigkeit eines senkrecht fallenden Körpers zu der Geschwindigkeit eines über eine schiefe Fläche laufenden wie AC : AB oder auch wie CE zu EF verhält, §. 65.; so verhält sich auch der Raum des ersten zu dem in der nehmlichen Zeit beschriebenen des andern, wie die Länge CE der schiefen Fläche zu ihrer Höhe EF, oder auch wie der Sinus Totus zum Sinus des Winkels, welchen die schiefe Fläche mit dem Horizont machet §. 66.

Zusaz.

§. 69. Ziehet man aus F eine Perpendikular FG auf CE, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CFE und FGE : CE : EF = EF : GE §. 152. Geomet. folglich weil sich der Raum des senkrecht fallenden Körpers zu dem des über eine schiefe Fläche laufenden wie CE : EF verhält §. 68., so mus GE der Raum sein, welchen der Körper über eine schiefe Fläche laufend in der nehmlichen Zeit beschreibt, als er senkrecht fallend den Raum EF beschriebe, oder der

Kör-

Körper wird auf der schiefliegenden Fläche nur von E bis G kommen, da er in der nehmlichen Zeit von E bis F senkrecht fiele.

Wenn demnach EF oder die Tiefe, so ein Körper in einer gewissen Zeit senkrecht durchfält, bekant ist, und man verlangt zu wissen, wie weit er auf einer schiefen Fläche CE in der nehmlichen Zeit kommen werde, so hat man nur zur ob angesetzten Proportion CE : EF = EF : EG den vierten Satz EG zu suchen §. 211. Rechenk. oder aber aus F, als aus dem untersten Punkt der Linie EF, so die Höhe des senkrechten Falles ausdrückt, die Perpendikular FG auf CE zu ziehen, um EG dadurch zu bestimmen.

Lehrsatz.

§. 70. Die Räume, welche ein Körper über verschiedene schiefe Flächen in gleicher Zeit durchlaufet, verhalten sich wie die Sinusse der Winkel, welche die Flächen mit dem Horizont machen.

Beweis: Wenn wir EF als die Höhe, über welche der Körper in der nehmlichen Zeit senkrecht fallen würde, indem er auf den schiefen Flächen EC und EO einen gewissen Raum beschreibet, annehmen, und aus F die Perpendikularen FG und FL auf EC und EO ziehen, so sind EG und EL die Räume, welche der Körper in eben dieser Zeit auf den schiefen Flächen beschreibet. §. 69. Betrachten wir ferner, daß wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke GFE und ECF wie auch LFE und EOF der Winkel GFE = ECF, und der Winkel LFE = EOF sei; und stellen uns EF in beiden Dreiecken als den Sinus Totus vor, so ist GE der Sinus des Winkels GFE = ECF, und EL der Sinus des Winkels LFE = EOF, und folglich ist, GE : LE = Sin ECF : Sin EOF.

Zu-

Zusaz.

§. 71. Wenn wir die Geschwindigkeiten, welche der Körper durch den senkrechten Fal EF sowohl als über die schiefen Flächen EG und EL in der nehmlichen Zeit erhält, durch a, b, c ausdrücken, so ist a : b = EF : EG, und a : c = EF : EL §. 67. Derowegen ist auch:

$$b : c = EG : EL.$$

d. i. die Geschwindigkeiten, welche ein Körper über verschiedene schiefe Flächen EG und EL laufend in der nehmlichen Zeit erhält, verhalten sich wie die in eben der Zeit beschriebene Räume EG und EL, und da sich diese Räume wie die Sinusse der Winkel, welche diese Flächen mit dem Horizont machen verhalten, §. 70., so stehen auch die Geschwindigkeiten mit diesen im Verhältnis.

Viertes Hauptstück.

Von geworfenen Körpern.

Erklärung.

§. 72. Wenn ein Körper von einer Kraft nach was immer für einer Richtung frei, d. i., daß seine Schwere ungehindert in ihn würken kan, getrieben wird, so heist man diese Bewegung einen Wurf, oder Schuß.

Obwohl die Benennungen Wurf und Schuß im Gebrauche unterschieden sind, und durch die eine meistens der Flug eines Körpers welcher in

einen

einen starken Bogen geschiehet, durch die andere aber, wenn der Körper in seinem Fluge sich mehr einer geraden Linie nähert, ausgedrückt wird, so können wir hier doch ohne Hindernis eine für die andere nehmen.

Zusaz.

§. 73. Es mus daher ieder Wurf oder Schuß aus zwoen Kräften nehmlich aus der treibenden und aus der Kraft der Schwere zusammengesezt sein. Nicht minder wenn die Bewegung in einem Raume geschiehet, der mit keiner widerstehenden fliessigen Materie angefüllet ist, so mus die treibende Kraft mit gleichförmiger die der Schwere aber mit vermehrter Geschwindigkeit würken. §. 46 u. 16.

Erklärung.

§. 74. Nachdem die Richtungslinie der treibenden Kraft d. i. die Seellinie des Geschützes in Ansehung des Horizonts eine Stellung bekomt, erhält auch der Wurf und dessen Richtungswinkel eine andere Benennung, nehmlich wenn die Richtungslinie mit dem Horizont parallel, oder der Richtungswinkel = 0 ist, so wird der darnach geschehene Wurf ein **horizontaler Wurf** oder Schuß genent, ist aber die Richtungslinie senkrecht auf dem Horizont, folglich der Richtungswinkel = 90°, so heist auch der darnach geschehene Wurf ein **senkrechter Wurf**; macht aber die Richtungslinie über oder unter den Horizont einen spizigen Winkel, so entstehet nach derselben ein **schiefer Wurf** überhaupt, insbesondere aber heist der Winkel über den Horizont der **Erhöhungswinkel** (Angulus Elevationis) und der nach selben geschehene Wurf ein **erhöhter Wurf**, so wie der Winkel untern Horizont der **Erniedrigungswinkel** (Angulus Depressionis)

nis) und der in dieser Richtung gemachte Wurf ein gesenkter Wurf genent wird.

Erklärung.

§. 75. Die Wurfsweite wird iene gerade Linie genent, so von dem Anfangspunkt der Fluglinie bis zu ihrem Ende gezogen werden kan. Ist nun diese Linie mit dem Horizont parallel; so ist es eine horizontale Wurfsweite; ist sie aber zu demselben schief; so wird sie auch eine schiefe Wurfsweite genent. Insbesondere heist sie eine erhöhte oder gesenkte Wurfsweite, nachdem die von dem Anfangspunkte bis zum Ende des Wurfs gezogene Linie sich über den Horizont erhöhet, oder senket.

Erklärung.

§. 76. Die Zeit, welche von Anfang bis zum Ende eines Wurfs verstreichet, heist die Dauerzeit desselben. Man pflegt sie in kleinere gleiche Teile einzuteilen, welche alsdenn überhaupt Momente genent werden.

Das gewöhnlichste kleinste Zeitmaasse ist eine Sekunde oder der sechzigste Teil einer Minute. Aber auch diese wird öfters und zwar bei genauern Verfahren noch in kleinere sechzig Teile, die man alsdenn Terzien nennet, geteilt. Diese kleine Zeitteile suchet man durch das Ablaufen verschiedener hierzu eigens erfundene Machinen zu erhalten; das einfacheste Mittel hierzu zu gelangen, sind die Schläge eines frei hangenden Pendels, welches eben eine solche Länge hat, daß eine Schwankung desselben genau in der verlangten Zeit geschehen könne. Die Berechnung dieser Länge aber würde uns zu weit abführen.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 77. Wenn ein Körper durch was immer für eine Kraft in horizontaler Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit getrieben wird, so beschreibt er eine halbe Parabol.

Beweis: Wenn eine Kraft in einen Körper nach der horizontalen Richtung AC mit gleichförmiger Geschwindigkeit würket, so sucht seine Schwere ihn zu gleicher Zeit senkrecht gegen den Mittelpunkte der Erde oder nach der Richtung AN mit zunehmender Geschwindigkeit zu bewegen §. 6. u. 46. oder derselbe erhält eine aus zwo Kräften zusammengesetzte Bewegung §. 14. Nun vermög der erstern Kraft beschreibt derselbe in gleichen aufeinander folgenden Momenten die gleiche Räume AE, EF, FH u. s. w. §. 25., und vermög der andern wachsen die in den nehmlichen Zeiten durchlofenen Räume AB, BD, DG u. s. w. wie die ungeraden Zahlen §. 15.; daher wenn man mit den durchlofenen Räumen die Parallelogrammen ABIE, AFLD, AGMH u. s. w. beschreibt, so siehet man klar, daß der Körper nach Verlauf des ersten Moments weder in E noch in B sondern in I, nach dem zwoten Moment weder in F noch in D sondern in L, und nach dem dritten weder in H noch in G sondern in M sein wird, §. 32. u. s. w. folglich wird er eigentlich die krumme Linie AILMO beschreiben. Um also zu erweisen, daß dieselbe eine halbe Parabol sei, so betrachtet, daß man die durchlofenen Räume AE = BI, AF = DL, AH = GM u. s. w. wie die dazu verwendte Zeiten oder Momenten ansehen können §. 45. und daß die Höhen eines fallenden Körpers sich wie die Quadrate der Zeiten, folglich wie die Quadrate der Linien BI, DL, GM u. s. w. verhalten §. 42.; Fig. 9.

die

die erstere aber oder die Höhen stellen die Abscissen, und die andere die halben Ordinaten der krummen Linie AILMO vor §. 344. u. 345. Geomet., und dieselben verhalten sich in einen Parabol eben so gegeneinander, §. 353. Geomet.; also wenn ein Körper nach horizontaler Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit getrieben wird, so beschreibt er eine halbe Parabol.

Zusatz.

§. 78. So oft also die treibende Kraft verändert wird, so wird auch allezeit eine andere Parabol beschrieben, und sie wird um so flächer als die treibende Kraft grösser angenommen wird.

Zusatz.

§. 79. Wüste man von einem nach horizontaler Richtung geworfenen Körper, daß derselbe vermög der treibenden Kraft allein in einer gewissen Zeit z. B. in einer Sekunde einen Raum AE = 100 Sch., vermög seiner Schwere aber in der ersten Sekunde einen AB = 15 Sch. durchlaufen werde, und nebst diesen wäre auch noch die ganze Dauerzeit = 4 Sekunden, oder auch die Höhe AN 240′ über die Horizontal NO bekant, so würde man die Weite NO = AC, in welcher nehmlich der Körper von der senkrechten AN fallen wird, finden können, wenn man erstlich AE mit der Zeit 4 multipliciret, oder da AE = BI, und AC = NO, so ist nach obigen Lehrsatz:

$$AB : AN = \overline{BI}^2 : \overline{NO}^2.$$

oder $15' : 240 = 10000 : x$

Folglich $\frac{AN \times \overline{BI}^2}{AB} = \overline{NO}^2$

oder

oder $\frac{240 \times 10000}{15} = 160000$

und $\frac{\sqrt[2]{AN \times \overline{BI}^2}}{AB} = NO.$

Das ist $\sqrt[2]{160000} = 400' = NO.$

Zusatz.

§. 80. Wäre die Höhe AN samt der Weite NO gegeben, und man verlangte den Raum AE = BI welchen die treibende Kraft in einer Sekunde für sich allein beschreiben könte, zu finden, so setzet

$AN : AB = \overline{NO}^2 : \overline{BI}^2.$

und $\frac{AB \times \overline{NO}^2}{AN} = \overline{BI}^2.$

Folglich $\frac{\sqrt[2]{AB \times \overline{NO}^2}}{AN} = BI.$

Zusatz.

§. 81. Hätte man die Weite AE der treibenden Kraft in einer Sekunde nebst der ganzen Weite NO bekant, so fände man die ganze Dauerzeit oder die Anzahl der Sekunden, wenn man setzte:

$AE : 1'' = NO : x$

und $\frac{NO \times 1''}{AE} = x$ der Anzahl Sekunden.

Zusatz.

§. 82. Ist die Weite AE = BI in einer Sekunde nebst der ganzen Weite NO gegeben, so erhält man die ganze Höhe AN, weil man AB aus der Er-

fahrung immer für $15'$ annehmen kan, wenn man setzet:

$$\overline{BI}^2 : \overline{NO}^2 = AB : AN.$$

$$\text{und } \frac{\overline{NO}^2 \times AB}{\overline{BI}^2} = AN.$$

Zusatz.

Fig. 10. §. 83. Wenn also zwo ungleiche Kräfte zween gleiche Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit in horizontaler Richtung AC und von einer Höhe AN fortzutreiben suchen, so stehen die horizontalen Weiten NO und NS mit den Räumen der treibenden Kräften der ersten Sekunde z. B. mit GM und GP, die zugleich auch die Geschwindigkeiten ausdrücken, in Proportion.

D. i. $AG : AN = \overline{GM}^2 : \overline{NO}^2$. §. 353. Geomet.

und $AG : AN = \overline{GP}^2 : \overline{NS}^2$. §. 353. Geomet.

Folglich $\overline{GM}^2 : \overline{GP}^2 = \overline{NO}^2 : \overline{NS}^2$

und also $GM : GP = NO : NS$. §. 217. Rechenk.

Dieses könte einigermaassen Gelegenheit geben, die Verhältnis der Geschwindigkeit des Triebs von zwoen Ladungen eines Feuergewehrs oder Geschützes zu finden, wenn man von dem Widerstand der Luft abstrahiren könte; da aber dieser sonderlich bei grössern Geschwindigkeiten, wie gewöhnlich die Stuckkugeln haben, ungemein beträchtlich ist, und bisher noch nicht genau bestimt hat werden können, so wird man sich auch nicht wundern, wenn diese Regeln nicht richtig eintreffen.

Lehrsatz.

§. 84. Wenn ein Körper durch was immer für eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit würkende Kraft in schiefer Richtung über den Horizont geworfen wird, so beschreibt er eine Parabol.

Beweis: Wenn ein Körper durch eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit würkende Kraft in einer schiefen Richtung AG über den Horizont AO geworfen wird, so beschreibt er ohne Schwere betrachtet in gleichen auf einander folgenden Zeiten oder Momenten die gleiche Räume AB, BC, CD u. s. w. §. 5. und man kan auch AB als die Geschwindigkeit der treibenden Kraft in einem Momente ansehen §. 12; ferner würde der geworfene Körper ohne Schwere von der Richtungslinie AG gar nicht abweichen, sondern sich nach dem ersten Momente um PB, nach den zweiten um QC, nach dem dritten um RD, nach dem vierten um SE und so nach iedem Momente um gleichviel, d. i. iedesmal um PB mehr als in den vorhergehenden erheben. Da aber die Schwere dieser Erhebung gerade entgegen würket, und diese Würkungen nach ieden Momente sich wie die Quadrate der Zeiten oder der verflossenen Momenten verhalten §. 42. so wird der Körper nach keinen Momente die besagte Höhen BP, QC, RD u. s. w. gänzlich erreichen, sondern derselbe wird nach dem ersten Momente anstaat in B nur in H, nach dem zweiten anstaat in C nur in I und nach dem dritten anstaat in D nur in L u. s. w. steigen können, und die Abgänge BH, CI, DL, EM u. s. w. von besagten Höhen werden wie die Quadrate der bis dahin verflossenen Momenten d. i. wie 1. 4. 9. 16. 25 u. s. w. zu nehmen. §. 42. Ziehet man nun Fig. 11.

die Würkungen der Schwere nach ieden Momente von den besagten Höhen ab; d. i. setzet man:

$$PB - BH = PH$$
$$QC - CI = QI$$
$$RD - DL = RL$$
$$SE - EM = SM \text{ u. s. w.}$$

so werden die würklich erreichte Höhen PH, QI u. s. w. anfänglich bis auf eine gewisse wie hier RL, welche der Würkung der Schwere gleich ist, wenn diese eben die Hälfte von der Höhe DR betraget, wachsen, dann aber da die Würkung der Schwere immer mehr zunimt, wieder abnehmen wie SM, TN; bis endlich die Würkung der Schwere der Höhe GO selbst gleich, und GO — GO = o wird; dann wird der Körper in O und also mit dem Anfangspunkt A des Wurfs wieder in gleiche Höhe gekommen sein. Hält nun den Körper in O nichts auf, so wird die Würkung der treibenden Kraft in folgenden Momente = GX sein, die Würkung der Schwere aber wird in voriger Verhältnis zunehmen, und = XY werden, und der Körper wird in Y kommen, u. s. w. bis er endlich durch einen Gegenstand aufgehalten wird, und auf diese Art wird also der geworfene Körper eigentlich die krumme Linie AHILMNO beschreiben.

Um nun zu erweisen, daß dieselbe eine Parabol sei, so lasset erstlich aus A die Perpendikular AZ fallen, und aus den Punkten HILMNO führet die Linien UH, VI, WL u. s. w. parallel zu AG, damit die Parallelogrammen AUHB, AVIC, AWLD u. s. w. entstehen.

Nun verhalten sich die Linien BH, CI, DL u. s. w. welche die Würkungen der Schwere ausdrücken, wie die Quadrate der Momenten, d. i.

BH

$BH : CI = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2.$

$BH : DL = \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2.$ u. s. w. §. 42.

und weil in den Parallelogrammen ihre gegenüberstehende Seiten einander gleich sind, §. 108. Geomet. so ist auch

$AU : AV = \overline{UH}^2 : \overline{VI}^2.$

$AU : AW = \overline{UH}^2 : \overline{WL}^2$ u. s. w.

Endlich stellet AZ einen Diameter, AU, AV, AW die Abscissen, und UH, VI, WL die Ordinaten der beschriebenen krummen Linie vor, und die Abscissen und Ordinaten eines Diameters einer Parabol verhalten sich eben also, §. 353. Geomet. folglich ist die beschriebene krumme Linie eine Parabol.

Um den Anfängern die Würkungen der treibenden Kraft und der Schwere, wenn sie bei geworfenen Körpern zusammengesetzt sind, begreiflicher zu machen, so wollen wir ihnen ein würkliches Beispiel in Zahlen berechnet hersetzen, nehmlich wir nehmen an, daß die treibende Kraft den Körper ohne Schwere betrachtet in ieden Momente, z. B. in ieder Sekunde = AB = 185' treiben könne, und daß der Richtungswinkel GAO eben so gros sei, daß die Höhe PB, um welche der Körper nach ieden Momente höher als in dem vorigen steigen solte, 90' betriege; ferner wissen wir aus der Erfahrung, daß die Würkung der Schwere nach der ersten Sekunde = BH = 15', nach der zwoten = CI = 15 × 4, nach der dritten = DL = 15 × 9 sei, und so alle Sekunden wie die Quadrate der verflossenen Zeiten zunehme, so bekommen wir nach obigen Lehrsatz:

A	$=$			$= 0$
PB $-$ BH	$=$ PH	$= 90 \times 1 - 15 \times 1$	$= 75$	
QC $-$ CI	$=$ QI	$= 90 \times 2 - 15 \times 4$	$= 120$	
RD $-$ DL	$=$ RL	$= 90 \times 3 - 15 \times 9$	$= 135$	
SE $-$ EM	$=$ SM	$= 90 \times 4 - 15 \times 16$	$= 120$	
TF $-$ FN	$=$ TN	$= 90 \times 5 - 15 \times 25$	$= 75$	
OG $-$ GO	$= 0$	$= 90 \times 6 - 15 \times 36$	$= 0.$	

Die erste Kolone der Zahlen links stellet die Höhen vor, so der Körper ohne Schwere betrachtet nach ieder verflossenen Sekunde erreichen hätte sollen, die zwote zeiget die Würkungen der Schwere nach ieder Sekunde, oder um wie viel der Körper durch die Schwere nach ieder Sekunde im Steigen verhindert worden ist; und die dritte weiset die von dem Körper würklich erreichte Höhen. Ferner siehet man, daß die erreichte Höhen immer anwachsen bis auf die mittlere, und daß diese die gröste $= 135'$, und eben so gros als die Würkung der Schwere 15×9, folglich nur die Hälfte von der ganzen RD $= 90 \times 3$ sei; endlich daß die folgende erreichte Höhen wieder abnehmen, und die letzte O $= 0$ werde, weil damals die Würkung der Schwere eben so gros als OG worden, folglich mus der Körper mit A wieder in gleiche Höhe gekommen sein.

Betrachten wir nun noch die nach verschiedenen Zeiten erreichte Weiten AB, AC, AD u. s. w. d. i. die Würkungen der treibenden Kraft als die Ordinaten UH, VI, WL u. s. w. und die Würkungen der Schwere BH, CI, DL u. s. w. in eben diesen Zeiten als die Abscissen AU, AV, AW u. s. w. und setzen sie nach obigen Lehrsatz und nach den oben gefundenen Zahlen an, so ist

$$AU : AV = \overline{UH}^2 : \overline{VI}^2$$

das ist $15 \times 1 : 15 \times 4 = \overline{185}^2 : \overline{370}^2$

oder $15 : 60 = 34225 : 136900$

und $AU : AW = \overline{UH}^2 : \overline{WL}^2$

das ist $15 \times 1 : 15 \times 9 = \overline{185}^2 : \overline{555}^2$

oder $15 : 135 = 34225 : 308025$.

D. i. die Abscissen stehen mit den Quadraten ihrer Ordinaten in Proportion, folglich ist die krumme Linie, so von dem geworfenen Körper beschrieben worden, eine Parabol.

Obwohl die Richtungen BP, CQ, DR u. s. w. der Schwere der Schärfe nach betrachtet, eigentlich nicht parallel sind, wie doch hier angenommen wird, sondern am Mittelpunkt der Erde zusammenlaufen, so kan man sie auch bei der grösten Wurfweite, die man mit gewöhnlichen Wurfmaschinen erhalten kan, dennoch ohne merklichen Fehler alzeit dafür annehmen, weil ihre Winkel am Mittelpunkt der Erde immer noch sehr spitzig ausfallen.

Zusatz.

§. 85. Wenn also die Richtungslinie AB mit dem Horizont AO einen Winkel OAB abwärts d. i. einen Erniedrigungswinkel machet, so läst sich auf die nehmliche Art erweisen, daß der nach derselben geworfene Körper ein Stück eine Parabol ACDEF beschreibet. Fig. 12.

Zusatz.

§. 86. Weil AR = RO, so ist $\frac{GO}{2} = DR$; Fig. 11.

und $\frac{DR}{2} = LR$ §. 368. Geomet., folglich ist $\frac{GO}{4} = LR$; da nun GO die Würkung der Schwere am

Ende des Wurfs, und LR die Höhe der Parabol anzeiget, so mus ein frei fallender Körper in der nehmlichen Zeit, als er schief geworfen eine Parabol beschreibt, viermal tiefer fallen, als die Höhe der Parabol beträgt.

Zusatz.

§. 87. Wenn man eine Wurfweite AO, so in einen gegebenen Erhöhungswinkel GAO erreicht worden ist, bekant hat, so kan man so wohl die Würkung der Schwere GO am Ende des Wurfs, als auch der treibenden Kraft AG, d. i. die Räume, so diese beide Kräfte iede für sich währender Zeit des Wurfs beschreiben würden, finden, wenn man setzet:

$$\text{Sin tot} : \text{tang. GAO} = AO : GO.$$

folglich ist

$$\frac{\text{tang GAO} \times AO}{\text{Sin tot}} = GO.$$

und

$$\text{Sin GAO} : \text{Sin tot} = GO : AG.$$

Folglich ist

$$\frac{\text{Sin tot} \times GO}{\text{Sin GAO}} = AG.$$

Zusatz.

§. 88. Da sich die Würkungen der Schwere wie die Quadrate der Zeiten, oder auch wie die Quadrate der Geschwindigkeiten der gleichförmigen Bewegung verhalten, §. 42., und man aus der Erfahrung weis, daß die Würkung der Schwere nach der ersten Sekunde = BH = 15′ sei, so läst sich, wenn man AG und GO sich nach vorigen Zusatz bekant gemacht hat, auch die Geschwindigkeit AB oder der Raum, den die treibende Kraft für sich den Körper in einer

Ge-

Sekunde beschreiben machen könte, finden, wenn man setzet:

$$GO : BH = \overline{AG}^2 : \overline{AB}^2$$

folglich $$\frac{BH \times \overline{AG}^2}{GO} = \overline{AB}^2$$

und also $$\sqrt[2]{\frac{BH \times \overline{AG}^2}{GO}} = AB$$

Zusatz.

§. 89. Dividiret man AG durch AB, so bekomt man die Momente der Dauerzeit, d. i. die Sekunden, in welchen der ganze Wurf geschehen ist. §. 13.

Zusatz.

§. 90. Wäre die Geschwindigkeit AB der treibenden Kraft samt der Dauerzeit und den Erhöhungswinkel bekant, so fände man die Wurfsweite AO, wenn man erstlich AB durch die Zeiten multiplicirt, um AG zu erhalten; denn aber setzet:

$$\text{Sin tot} : \text{Kosin } A = AG : AO.$$

und $$\frac{\text{Kosin } A \times AG}{\text{Sin tot}} = AO.$$

Lehrsatz.

§. 91. Die mit verschiedenen treibenden Kräften in einerlei Erhöhungswinkel erreichte Wurfsweiten verhalten sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten der treibenden Kräfte.

Beweis: Betrachtet, daß der geworfene Körper z. B. mit dopelter Geschwindigkeit in der nehmlichen Zeit als mit einfacher Geschwindigkeit einen dopelten Raum beschreibe. §. 13. Die Würkung der Schwe- Fig. 13.

re aber ist nach Verlauf einer gleichen Anzahl Momente in beiden Würfen gleich gros. Wenn daher der Körper bei dem ersten Wurf mit einfacher Geschwindigkeit AB nach Verlauf von 6 Momenten vermög der treibenden Kraft allein den Raum AG beschriebe, und die Würkung der Schwere = GO wäre, so wird derselbe bei dem zweiten Wurf mit dopelter Geschwindigkeit AC nach eben dieser Zeit einen dopelten Raum AM vermög der treibenden Kraft allein beschreiben sollen, §. 13. Die Würkung der Schwere MN aber wird damals nicht grösser als beim ersten Wurf um eben diese Zeit sein §. 6.

Da nun in dem Dreiecke AMS die Linie GO parallel zu MS, und $AG = \frac{AM}{2}$ ist, so mus auch $AO = \frac{AS}{2}$, und folglich $OG = \frac{MS}{2}$ sein; weil ferner $OG = MN$, so ist auch $MN = \frac{MS}{2} = NS$; weil nun die Würkung der Schwere MN der von dem geworfenen Körper würklich erreichten Höhe NS gleich ist, so ist N der höchste Punkt der Parabol des Wurfs mit dopelter Geschwindigkeit, und $AS = 2AO$ die halbe, $AY = 2AS$ oder $4AO$ die ganze Wurfsweite. Nun aber ist

$$4AO : AO = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2$$

oder $$AY : AO = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2.$$

Und was hier von der dopelten und einfachen Geschwindigkeit behauptet wird, läst sich ebenfals von allen übrigen Verhältnissen derselben sagen, also ist erwiesen, daß die mit verschiedenen Geschwindigkeiten und unter einerlei Erhöhungswinkel erreichte Wurfsweiten sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten.

Zu-

Zusatz.

§. 92. Da der Körper beim Wurf mit dopelter Geschwindigkeit zu Beschreibung der halben Parabol AN eben so viel Zeit brauchet, als beim Wurf mit einfacher Geschwindigkeit zur Beschreibung der ganzen Parabol ALO, so mus er zur Beschreibung der ganzen Parabol ANY dopelt so viel Zeit als zu ALO nöthig haben; es müssen sich demnach bei Würfen unter einerlei Erhöhungswinkel aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten die Zeiten wie die Geschwindigkeiten verhalten.

Zusatz.

§. 93. Gleichwie erwiesen worden, daß:

$$AY : AO = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2.$$

so ist auch $\sqrt[2]{AY} : \sqrt[2]{AO} = \sqrt[2]{\overline{AC}^2} : \sqrt[2]{\overline{AB}^2}$.

und folglich $\sqrt[2]{AY} : \sqrt[2]{AO} = AC : AB$. §. 217. Rechenk. d. i. die Quadratwurzeln aus den mit verschiedenen Geschwindigkeiten in einerlei Erhöhungswinkel erreichten Wurfweiten verhalten sich wie diese Geschwindigkeiten.

Obwohl der Lehrsaß §. 91. und Zusaß §. 93. in den Gesäßen der Bewegung für sich betrachtet allerdings gegründet ist, und dem Ansehen nach scheinet, daß man ihn beim Bomben werfen, wenn man in einerlei Erhöhungswinkel verschiedene Weiten erreichen sol, zur Bestimmung der Pulverladungen des Böllers, da man sie als die Ursachen der Geschwindigkeiten ansiehet, mit Vorteil anwenden könne; so kan ich doch die Anfänger, die sich durch dergleichen zu voreilig angenommenen Regeln nur gar zu oft in die Irre führen lassen, und dann durch die Erfahrung eines

an-

andern überzeigt die Schuld der Theorie beimessen, hier nicht unerinnert lassen, daß die Würkungen des entzundenen Pulvers nicht mit ihrer Menge in Proportion stehen. Durch die Entzündung von 2 ℔ Pulver wird zwar wohl zweimal so viel eingesperte oder verdickte Luft als in 1 ℔ los und ihrer Schnelkraft überlassen; allein da die Entzündung nur nach und nach geschehen kan, und 2 ℔ hierzu mehr Zeit als 1 ℔ brauchen, so ist klar, daß die losgelassene Luft niemals mit ihrer ganzen Schnelkraft zugleich in die Bombe würke, folglich eine dopelte Menge Pulver derselben niemal eine dopelte Geschwindigkeit beibringe, und also auch damit keine vierfache Weite zu erreichen sein wird. Ich übergehe mit Stilschweigen, um wie viel die Wurfsweite bei vermehrter Geschwindigkeit oder verstärkter Ladung durch den grössern Widerstand der Luft als bei minderer Geschwindigkeit oder Ladung mehr verkürzt werden mus, da uns die Erfahrung dessen ohnehin genugsam überzeiget.

Lehrsaz.

§. 94. Wenn zween Würfe mit gleicher Geschwindigkeit der treibenden Kraft aber in verschiedenen Richtungswinkeln geschehen, so verhalten sich die Dauerzeiten derselben wie die Sinusse ihrer Erhöhungswinkel.

Fig. 14. Beweis: Betrachtet, daß, weil bei beiden Würfen nach den verschiedenen Erhöhungswinkeln GAO und HAI die Geschwindigkeiten der treibenden Kräfte die Körper in gleichen aufeinander folgenden Momenten gleiche Räume AG und AF durchlaufen machen, die Würkung der Schwere so wohl bei dem einem als an-

andern Wurf nach einer gleichen Anzahl Momente immer gleich gros ist, derowegen wird dieselbe oder OG am Ende des ersten Wurfs gleich FL der Würkung der Schwere des zweiten Wurfs nach eben so viel Momenten sein. Nun aber verhalten sich die Würkungen der Schwere im zweiten Wurf nach verschiedenen Momenten wie die Quadrate dieser Momente d. i.

$$HI : FL = \overline{AH}^2 : \overline{AF}^2. \text{ §. } 42.$$

also verhalten sich auch die Würkungen der Schwere HI und OG der beiden Würfe wie die Quadrate ihrer verflossenen Momente d. i.

$$OG : HI = \overline{AG}^2 : \overline{AH}^2.$$

Ferner betrachtet, daß, wenn man aus B und C die Perpendikularen BD und CE auf AI fallen läst, AB so oft in AG, und BD so oft in OG enthalten sei, als in diesem Wurf Momente verfliessen §. 12; eben so ist in dem zweiten Wurf AC so oft in AH, und CE in HI enthalten, als in diesem Wurf Momente verfliessen.

Wenn man daher AB = AC als den Sinus totus ansiehet, so sind BD und CE die Sinusse der Erhöhungswinkel; und benennen wir den ersten BD mit s und den andern CE mit S; die Dauerzeit oder die Momente des ersten Wurfs mit x und die des andern mit y, so können wir OG durch sx und HI durch Sy ausdrücken; und da sich diese Linien wie die Quadrate der Momente verhalten §. 42. so ist

$$sx : Sy = xx : yy.$$

folglich $xxyS = yyxs$

dividirt man nun beide Glieder durch xy §. 56. Rechenk. so ist:

$$xS = ys.$$

Endlich diese Gleichung in eine Proportion aufgelöst:

$$x : y = s : S.$$

D. i.

D. i. die Dauerzeiten zweener mit gleicher Geschwindigkeit und in verschiedenen Erhöhungswinkeln geschehenen Würfe verhalten sich wie die Sinusse ihrer Erhöhungswinkel.

Zusatz.

§. 95. Wenn also die Dauerzeit eines Wurfs = a, und sein Erhöhungswinkel GAO gegeben wäre, und man verlangte die Dauerzeit y eines andern Wurfs in einen bekanten Erhöhungswinkel HAI, iedoch mit der vorigen treibenden Kraft zu finden, so setzet

$$\text{Sin GAO} : \text{Sin HAI} = a : y$$

folglich $\frac{\text{Sin HAI} \times a}{\text{Sin GAO}} = y$

Zusatz.

Fig. 15. §. 96. Hätte man die Dauerzeit eines Wurfs AC als a in einen gewissen Erhöhungswinkel bekant, und man verlangte die Dauerzeit y des mit der nehmlichen Kraft aber in einen Winkel CAD = 90° oder eines senkrecht in die Höhe gehenden Wurfs zu finden, so ist nach §. 94.

$$\text{Sin BAC} : \text{Sin tot} = a : y$$

und $\frac{\text{Sin tot} \times a}{\text{Sin BAC}} = y$

und diese mus nothwendig von allen Würfen, welche mit der nehmlichen treibenden Kraft in verschiedenen Winkeln geschehen können, die gröste sein.

Aufgabe.

Fig. 14. §. 97. Wenn von zween mit gleicher treibender Kraft geschehenen Würfen ihre verschiedene Erhöhungswinkel samt der Wurfweite AO des einen bekant, wie die Wurfweite AI des andern zu finden?

Auf-

Auflösung: 1. Suchet die Würkung der Schwere OG am Ende des ersten Wurfs, indem ihr setzet:

$$\text{Sin tot} : \text{tang } GAO = AO : GO$$

und folglich $\frac{\text{Tang } GAO \times AO}{\text{Sin tot}} = GO$. §. 430. Geom.

2. Suchet auch die Würkung der treibenden Kraft AG folgender gestalt:

$$\text{Sin } GAO : \text{Sin tot} = GO : AG.$$

und also $\frac{\text{Sin tot} \times GO}{\text{Sin } GAO} = AG$. §. 434. Geomet.

3. Da sich die Würkungen der Schwere wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten §. 42. und die Würkung der Schwere nach der ersten Sekunde $= 15'$ und am Ende des Wurfs $= OG$ ist, so ist

$$OG : 15' = \overline{AG}^2 : \overline{AB}^2.$$

und folglich $\sqrt[2]{\frac{15' \times \overline{AG}^2}{OG}} = AB$ der Geschwindigkeit der treibenden Kraft.

4. Da AB so oft in AG enthalten als Zeiten verfliessen währenden Wurf, so ist $\frac{AG}{AB} = a$ der Dauerzeit des ersten Wurfs.

5. Weil sich die Dauerzeiten der Würfe wie die Sinusse ihrer Erhöhungswinkel verhalten §. 24. so ist, wenn man die Dauerzeit des zweiten Wurfs $= y$ nimt:

$$\text{Sin } GAO : \text{Sin } HAI = a : y$$

folglich $\frac{\text{Sin } HAI \times a}{\text{Sin } GAO} = y$.

6.

6. Weil die Geschwindigkeiten der treibenden Kräften in beiden Würfen gleich angenommen werden, d. i. weil AB = AC, so ist
AB × y = AH.

7. Um also die zweite Wurfweite AI zu finden, setzet:

$$\text{Sin tot} : \text{Kosin von } HAI = AH : AI.$$

$$\text{und } \frac{\text{Kosin von } HAI \times AH}{\text{Sin tot}} = AI.$$

Da die Auflösung dieser Aufgabe etwas weitläufig ist, und viel zu rechnen erfordert, daher in der Ausübung beim Bomben werfen ziemlich unbequem und langweilig wäre, so geben wir sie indessen nur zur Ubung des Verstands, und werden erstlich in der Folge noch kürzere Arten die Wurfweiten zu berechnen beibringen.

Zusatz.

Fig. 15. §. 98. Hätte man die Wurfweite AC, welche in einen gegebenen Winkel BAC mit einer gewissen treibenden Kraft AE erreicht werden kan, bekant, und man verlangte die Höhe AD zu finden, auf welche der senkrecht in die Höhe geworfene Körper durch eben die treibende Kraft AF = AE getrieben werden könte, so suchet zuvor sowohl die Dauerzeit der ersten als des andern Wurfs nach der senkrechten Richtung AD wie §. 96. und auch die Geschwindigkeit AE = AF der treibenden Kraft nach §. 97. N. 3. Denn aber multiplicirt die Geschwindigkeit durch die Dauerzeit des senkrechten Wurfs, so ist das Produkt der senkrechten Höhe AD gleich.

Um sich dessen zu überzeugen, so nehme man an, daß die Geschwindigkeit AE = AF der treibenden Kraft in 1 Sekunde = 75' sei, und daß folglich der geworfene Körper ohne Schwere betrachtet in der senkrechten Richtung AD alle Sekunden 75 Schuh steigen müste; weil er aber von der Schwere beständig und zwar nach der ersten Sekunde um 15' im Steigen verhindert wird, §. 52., und diese Hindernisse alle Sekunden wie die Quadrate der verflossenen Zeiten zu nehmen, so wird der Körper nach der

1ten Sekunde $75' \times 1 - 15 \times 1 = 60'$
2ten. .... $75 \times 2 - 15 \times 4 = 90$
3ten. .... $75 \times 3 - 15 \times 9 = 90$
4ten. .... $75 \times 4 - 15 \times 16 = 60$
5ten. .... $75 \times 5 - 15 \times 25 = 0$

gestiegen sein, d. i. er wird nach der 5ten Sekunde nicht mehr weiter steigen können, weil alsdann die Würkung der Schwere eben so gros als die der treibenden Kraft ist, sondern er wird eben in diesem Momente zurück zu fallen anfangen, und also in D seine gröste Höhe, die dem Produkt aus der Geschwindigkeit AF der treibenden Kraft in die Anzahl der verflossenen Sekunden d. i. $75' \times 5 = 375$ gleich ist. Daher ist also klar, daß man um die senkrechte Wurfhöhe AD zu bekommen, die Geschwindigkeit der treibenden Kraft durch die Dauerzeit multipliciren müsse.

Lehrsaz.

§. 99. Die in verschiedenen Erhöhungswinkeln mit gleichen treibenden Kräften erreichte horizontale Wurfweiten verhalten sich wie die Sinusse der dopelten Erhöhungswinkel.

Fig. 16. Beweis: Wenn EAC und DAB die zween Erhöhungswinkel sind, in welchen mit gleicher treibender Kraft die Wurfweiten AB und AC erreicht worden, so sind die Perpendikularen BD und CE die Würkungen der Schwere am Ende eines ieden der beiden Würfe. Richtet man ferner aus A eine Perpendikular AF von unbestimter Länge auf AC auf; beschreibt durch die drei Punkte A, D und E einen halben Zirkel nach §. 60. Geom. und ziehet noch die Linien DF, EF, GE und GD, d. i. leztere zwo aus dem Mittelpunkt G des Zirkels; so ist der Winkel AFD = DAB, und AFE = EAC. §. 77 u. 84. Geom. Nun aber ist AGD dopelt so gros als AFD, und folglich auch als DAB; und AGE ist dopelt so gros als AFE oder EAC §. 77. Geom. folglich sind AGD und AGE gleich den dopelten Erhöhungswinkeln, und läst man aus D und E noch die Perpendikularen DL und EI auf AF fallen, so stellen sie die Sinusse der dopelten Erhöhungswinkel vor §. 428. N. 3. Geom. Da nun die Dreiecke ADB und ALD einander, und ACE und AIE ebenfals einander wegen den Parallelen AL, BD; AB, LD, und AI, EC, AC, IE, gleich und ähnlich sind, so ist

AC : AB = IE : LD. §. 140. Geom.

daß ist: die in verschiedenen Erhöhungswinkeln mit einerlei treibenden Kraft erreichten horizontalen Wurfweiten verhalten sich wie die Sinusse der dopelten Erhöhungswinkeln.

Fig. 17. Es ist das nehmliche auf eben die Art zu erweisen, wenn man anstaat den ganzen Richtungslinien AE und AD fig. 16. nur ihre Viertel wie AE und AD fig. 17. für die Sehnen des halben Zirkels der zu beschreiben ist, annimt. Der Unterschied wird alsdann nur darinnen bestehen, daß LD = AN nur der vierte Teil der Wurfweite

AB,

AB, und IE = MA nur der vierte Teil der Wurfweite AC ist.

Zusaz.

§. 100. Da sich die mit gleicher treibenden Kraft erreichten horizontalen Wurfweiten wie die Sinusse ihrer dopelten Erhöhungswinkel verhalten §. 99., der dopelte Winkel von 45° HAR = AGH = 90° ist, und den Sinus totus GH als den grösten zum Sinus hat, so mus auch in dem Winkel von 45°, wenn man die treibende Kraft gleich annimt, unter allen andern Erhöhungswinkeln die gröste Wurfweite AO erreicht werden. Fig. 18.

Zusaz.

§. 101. Wenn zween Würfe in den Erhöhungswinkeln SAB und TAB, wovon der erste um eben so viel grösser als der andere kleiner als 45° ist, mit gleicher treibender Kraft geschehen, so ist der dopelte EGA des ersten um EGH grösser, und der dopelte AGD des andern um HGD d. i. um eben soviel kleiner als AGH = 90°; derowegen ist FGE = AGD, und folglich sind auch ihre Sinusse IE und LD einander gleich. Da nun auch der stumpfe Winkel EGA IE zu seinem Sinus hat, §. 428. Geom. so haben diese zween dopelte Erhöhungswinkel gleiche Sinusse; weil sich aber die Wurfweiten wie diese verhalten, §. 99. so folget, daß man mit zween Würfen, deren Erhöhungswinkel einer um soviel grösser als der andere kleiner als 45° ist, einerlei Wurfweiten AB erreichen müße.

Der Unterschied dieser zween Würfe bestehet nur darinn, daß in dem grössern Winkel eine höhere nach dem kleinern aber eine niedere Parabol be-

schrieben wird; daß die Dauerzeit des Wurfs im erstern um so länger als die im andern als der Sinus dessen Erhöhungswinkel grösser ist als der des andern; und endlich daß der geworfene Körper im ersten durch seinem Fal eine grössere Geschwindigkeit erlange. Die Umstände allein bestimmen, welchen Winkel von beiden man nehmen müsse.

Aufgabe.

Fig. 16. §. 102. Wenn zween Erhöhungswinkel nebst der in einem derselben erreichten horizontalen Wurfweite gegeben, wie die Wurfweite, welche man in dem andern Winkel mit gleicher treibenden Kraft erreichen kan, zu finden?

Geometrische Auflösung: 1. Zeichnet die zween gegebenen Erhöhungswinkel DAB und EAB; machet AB der gegebenen Wurfweite nach einem beliebigen verjüngten Maasstab gleich, und errichtet aus B die Perpendikular BD.

2. Errichtet auf AB die unbestimte Perpendikular AF, und auf AD die Perpendikular DF bis sie AF durchschneidet.

3. Teilet AF in G in zween gleiche Teile, und mit dem Radius GA beschreibet den halben Zirkel AHDF.

4. Lasset aus dem Punkt E, wo der Schenkel AE des andern gegebenen Erhöhungswinkel den halben Zirkel durchschneidet, eine Perpendikular, EC auf AC fallen, so ist, AC die Wurfweite, so man in dem Erhöhungswinkel EAC mit der nehmlichen treibenden Kraft erreichen kan. §. 99.

Auf-

Auflösung durch die Rechnung: Setzet:

$$\text{Sin } 2DAB : \text{Sin } 2EAC = AB : AC.$$

so ist $\frac{\text{Sin } 2EAC \times AB}{\text{Sin } 2DAB} = AC.$

Wolte man nicht die ganze Linie AD fig. 16. für die Sehne des Zirkels sondern nur z. B. den vierten Teil davon wie fig. 17. annehmen, so teilet die gegebene Wurfweite AB in 4 gleiche Teile, errichtet auf dem vierten Teile derselben die Perpendikular ND, und auf AD die Perpendikular DF bis sie AF durchschneidet, und mit $\frac{1}{2}$AF = GA beschreibet den halben Zirkel ADF; endlich lasset aus E, wo der Schenkel AE des einen Erhöhungswinkel den Zirkel durchschneidet, die Perpendikular EM fallen, so ist AM der vierte Teil der gesuchten Wurfweite AC = 4AM.

Aufgabe.

§. 103. Wenn man zwo horizontale Wurfweiten, welche man mit gleicher treibender Kraft in verschiedenen Erhöhungswinkeln erreichen kan, nebst dem Erhöhungswinkel der einem bekant hat, wie der Erhöhungswinkel der andern zu finden? Fig. 16.

Geometrische Auflösung: 1. Traget die zwo Wurfweiten AB und AC nach einem beliebigen verjüngten Maasstab auf eine horizontallinie aus einem Punkt A auf, und zeichnet den gegebenen Erhöhungswinkel DAB der einen.

2. Errichtet auf AC aus B die Perpendikular BD bis an den Schenkel AD; AF und CE ebenfals perpendikular auf AC, aber von unbestimter Länge.

3. Auf AD errichtet die Perpendikular DF bis sie AF durchschneidet, und mit $\frac{1}{2}$AF = GA beschreibet den halben Zirkel ADF.

4. Durch E wo nehmlich der Zirkel die Perpendikular CE durchschneidet, ziehet die Linie EA, so ist FAC der gesuchte Erhöhungswinkel zur Wurfweite AC. §. 99.

Auflösung durch die Rechnung: Setzet:

$$AB : AC = \text{Sin } 2DAB : \text{Sin } 2EAC,$$

so ist: $\frac{AC \times \text{Sin } 2DAB}{AB} = \text{Sin } 2EAC$. §. 99.

Welchen man in den Sinustafeln nachzuschlagen hat, um seine Grade zu finden, die man alsdenn halbiren muß.

Zusaz.

§. 104. Ereignet es sich, daß die Wurfweite AC so gros ist, daß der halbe Zirkel ADF die Perpendikular CE weder durchschneiden noch berühren kan, so ist es ein Zeichen, daß gedachte Wurfweite mit der nehmlichen treibenden Kraft auch nicht in 45° grad, folglich auch in keinen andern Erhöhungswinkel erreicht werden kan, und in solchem Falle ist man gezwungen eine grössere treibende Kraft anzunehmen.

Wolte man auch in dieser Aufgabe nicht die ganze Linie AD fig. 16. sondern nur $\frac{1}{4}$ davon wie AD fig. 17. annehmen, so hat man auf eine ähnliche Weise wie in der vorigen Aufgabe zu verfahren.

Lehrsatz.

§. 105. Der Parameter der Achse einer von einem geworfenen Körper beschriebenen Parabol ist die dritte Proportional zu der Würkung der Schwere am Ende des Wurfs, und zu der erreichten Wurfweite.

Beweis: Wenn EAC der Erhöhungswinkel des Wurfs, in welchen mit einer gewissen treibenden Kraft die Parabol AOC beschrieben worden, so ist AC die Wurfweite, EC aber die Würkung der Schwere am Ende des Wurfs. Fig. 16.

Da nun wegen den Parallelen AF und EC, wie auch IE und AC die Linien AC = IE, und EC = AI sind, und IE perpendikular auf den Durchmesser des halben Zirkels AEF auftrift, so ist:

$$AI : IE = IE : IF. \text{ §. 151. Geom.}$$

folglich ist: $\overline{IE}^2 = AI \times IF$, und $\frac{\overline{IE}^2}{AI} = IF$

CE = AI aber ist viermal so gros als die Achse PO der Parabol, oder als die gröste Abscisse der grösten Ordinate AC = IE oder der Wurfweite selbst, und diese halbe Ordinate $AP = \frac{AC}{2} = \frac{IE}{2}$.

Wenn wir nun den Parameter der Achse = p annehmen, so ist:

$$\frac{AI}{4} : \frac{IE}{2} = \frac{IE}{2} : p$$

und folglich $\frac{\overline{IE}^2}{4} = \frac{AIp}{4}$

und wenn beiderseits die Divisorn hinweg gelassen werden:

$$\overline{IE}^2 = AIp, \text{ und also } \frac{\overline{IE}^2}{AI} = p$$

wenn nun der oben gefundene gleiche Wehrt im ersten Glied der Gleichung anstatt diesem gesetzt wird, so ist $IF = p$ und also:

$$AI : IE = IE : p.$$

oder $CE : AC = AC : p.$

Folglich ist der Parameter der Achse die dritte Proportional zur Würkung der Schwere und Wurfweite.

Zusaz.

Fig. 17. §. 106. Wird AE nur $\frac{1}{4}$ von der Linie der treibenden Kraft angenommen, so ist EM ebenfals nur $\frac{1}{4}$ von der Würkung der Schwere am Ende des Wurfs, und folglich der Achse oder der grösten Abscisse PO gleich, und wegen den Parallelen AF und ME, wie auch MA und IE ist $ME = AI$ und $MA = IE$; und wir bekommen wiederum:

$$AI : IE = IE : IF. \text{ §. 151. Geom.}$$

folglich $\overline{IE}^2 = AI \times IF$ und $\frac{\overline{IE}^2}{AI} = IF.$

Nicht minder ist: $AI : 2IE = 2IE : p.$

folglich $4\overline{IE}^2 = AI \times p.$

und $\frac{\overline{IE}^2}{AI} = \frac{p}{4}$

daher ist $IF = \frac{p}{4}$

daß ist IF in dem halben Zirkel ist der vierte Teil des Parameters der Achse.

Wenn man also die vorhergehende Aufgabe durch die geometrische Beschreibung auflöset, so kan man sich zur Zeichnung der Parabol gleich des viertel Parameters IF bedienen.

Lehr=

Lehrsatz.

§. 107. Die mit was immer für einer treibenden Kraft erreichte senkrechte Wurfshöhe AD ist die dritte Proportional zu der Würkung der Schwere BC und der Würkung AB der nehmlichen treibenden Kraft eines nach der schiefen Richtung AB geschehenen Wurfes. Fig. 15.

Beweis: Betrachtet, daß ein schwerer Körper in der nehmlichen Zeit durch die Linie AD fallen würde, als er durch dieselbe von der treibenden Kraft hinauf getrieben wird §. 98. derowegen kan man durch sie so wohl die Würkung der Schwere, als auch die Dauerzeit des senkrechten Wurfs, durch AB aber die Dauerzeit des schiefen Wurfs, und durch BC die Würkung der Schwere desselben ausdrücken. Nun aber verhalten sich die Würkungen der Schwere von beiden Würfen wie die Quadrate der Zeiten, d. i.

$$BC : AD = \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2. \text{ §. 42.}$$

folglich $\overline{AB}^2 \times AD = \overline{AD}^2 \times BC$

und wenn beiderseits mit AD dividirt wird, so ist

$$\frac{\overline{AB}^2 \times AD}{AD} = \frac{\overline{AD}^2 \times BC}{AD}$$

das ist $\overline{AB}^2 = AD \times BC$

löset man endlich diese Gleichung in eine Proportion auf, so ist:

$$BC : AB = AB : AD.$$

Zusatz.

§. 108. Da wir §. 107. erwiesen haben, daß die senkrechte Wurfshöhe zur Würkung der Schwere und der Würkung der nehmlichen treibenden Kraft eines in schiefer Richtung geschehenen Wurfs die dritte Proportional sei, und die Würkung der Schwere allezeit als die gröste Abscisse, die Würkung der treibenden Kraft

eines schiefen Wurfs als die gröste halbe Ordinate eines Diameters angesehen werden kan §. 84. der Parameter desselben aber ebenfals die dritte Proportional zu den zwoen ist §. 380. Geom. so folget, daß die senkrechte Wurfshöhe dem Parameter eines Diameters gleich sei, der die Würkung der Schwere zur Abscisse, die Würkung der treibenden Kraft aber zur halben Ordinate hat.

Zusatz.

Fig. 16. §. 109. Da beide Dreiecke ABD und ADF rechtwinkelicht sind, und wegen den Parallelen AF und BD der Winkel FAD = ADB, so ist auch AFD = DAB, folglich sind diese Dreiecke einander ähnlich, und weil sie eine gemeine Seite AD haben,

so ist: BD : AD = AD : AF.

D. i. der Durchmesser des halben Zirkels den wir §. 102. zur Erfindung der Wurfsweiten oder der Erhöhungswinkel gebraucht haben, ist die dritte Proportional zur Würkung der Schwere, und zu der Würkung der treibenden Kraft eines schiefen Wurfs; da nun auch die mit der nehmlichen treibenden Kraft erreichte senkrechte Wurfshöhe oder der Parameter des Diameters die dritte Proportional zu diesen Linien ist, so ist dieser Durchmesser des halben Zirkels der senkrechten Wurfshöhe oder dem Parameter des Diameters gleich.

Aufgabe.

§. 110. Wie der Erhöhungswinkel zu finden, um mit einer angenommenen treibenden Kraft auf ein über dem Horizont liegenden Gegenstand, dessen Höhe und Entfernung gegeben, zu werfen?

Fig. 19. **Auflösung: durch geometrische Beschreibung:**

1. Wenn AB die gegebene horizontale Entfernung und BC die Perpendikularhöhe des Gegenstandes über

den

den Horizont, CAB aber der gemessene oder bekante Höhenwinkel ist, so machet vor allen mit einer nach Belieben angenommenen treibenden Kraft (die aber, wie wir in der Folge sehen werden, dennoch hinlänglich sein mus, um die vorgegebene Entfernung in einen gewissen Winkel zu erreichen) in einem beliebigen Erhöhungswinkel einen Probwurf nach einem horizontal liegenden Gegenstand; messet die damit erreichte Wurfweite, und suchet die perpendikulare Wurfshöhe, oder die ihr mit eben dieser Kraft im 90ten Grade erreichen würdet, nach §. 98.

2. Errichtet auf AB die Perpendikular AD, und machet solche der bekant gewordenen Wurfshöhe im 90ten Grade gleich.

3. Beschreibet auf AD als auf einer Sehne einen Zirkelbogen AGD, welcher einen Winkel AFD = AGD = ACF mit seiner Spitze am Umkreise fassen kan, folgender Gestalt: nehmlich, weil in dem rechtwinkelichten Dreieck ABC der Höhenwinkel CAB gegeben ist, so wird euch auch der Winkel ACB, und sein Supplement ACF auf 180° bekant, §. 109. Geom. teilet ACB in zween gleiche Teile, und machet sowohl den Winkel GAD als ADG dem halben Winkel ACB gleich, und suchet mittelst der zwo Sehnen AG und DG den Mittelpunkt O, aus welchen ihr mit dem Radius OA oder OG den Bogen AGD beschreiben könt. §. 60. Geom. oder noch kürzer: machet OAD = CAB, teilet AD in zween gleiche Teile AH und HD, und errichtet in H die Perpendikular OG, so wird der Mittelpunkt O des verlangten Bogens im Durchschnitte der zwo Linien AO und GO sein.

4. Verlängert BC bis sie den gemachten Bogen in zween Orten wie hier in F und E durchschneidet, oder nach Umständen etwan in G nur berühret, und ziehet

AF

AF und AE, so werden FAB und EAB die zween Erhöhungswinkel sein, in welchen man mit der beim Probwurf gebrauchten Kraft eben den über den Horizont erhobenen Punkt C erreichen können wird.

Beweis: Ziehet die Linien DF und DE, und betrachtet, daß AD die senkrechte Wurfhöhe der angenommenen Kraft sei, und wenn AF und AE die wahren Richtungslinien um in C zu werfen sind, daß FC und EC die Würkungen der Schwere am Ende der beiden Würfe sind, und wir müssen bekommen:

AD : AF = AF : FC

und AD : AE = AE : EC. §. 107.

Um nun dieses zu erweisen, so betrachtet daß der Winkel AFD = ACF vermög der Bedingung, und DAF = AFC wegen den Parallelen AD und CF sei, folglich ist auch FAC = ADF, und die Dreiecke ACF und DFA sind einander ähnlich, und weil sie die Seite AF gemein haben, so ist

AD : AF = AF : FC. §. 140. Geomet.

Eben dieses läst sich von den Dreiecken ACE, und DEA auf die nehmliche Art erweisen, also sind AF und AE die wahren Richtungslinien, und FAB und EAB die zween Erhöhungswinkel, in welchen mit der angenommenen Kraft der über den Horizont erhobene Ort C erreicht werden kan.

Ereignet es sich, daß die Linie BE den Bogen nur in G berühret, so ist alsdenn der Winkel GAB der einzige, in welchen man in den Punkt C werfen könnte. Geschihet es aber, daß die Linie BE den Bogen weder durchschneidet, noch berühret, sondern ganz ausser denselben fält, so ist es ein Zeichen, daß man den Ort C mit der angenommenen Kraft gar nicht erreichen könne.

In

In einem solchen Falle also hat man eine grössere Kraft anzunehmen, mit derselben einen neuen Probwurf zu machen, und übrigens wie gleich gewiesen worden zu verfahren.

Verlangte man auch noch die horizontalen Wurfweiten AP und AM, die man in den zween besagten Erhöhungswinkeln FAB und EAB mit der angenommenen Kraft erreichen würde, zu finden, um die zwo Parabolen ATP, und ARM desto bequemer beschreiben zu können, so beschreibet aus H mit dem Radius HA dem halben Zirkel DZA, verlängert AE und AF bis an denselben in L und N, lasset aus L und N die Perpendikularen LM und NP auf die Verlängerung von AB fallen, so sind AM und AP die verlangten Wurfweiten §. 102. Teilet nun iede derselben in S und U in zween gleiche Teile, errichtet die Perpendikularen $SR = \frac{LM}{4}$ und $UT = \frac{PN}{4}$ so habt ihr die Höhen oder die grösten Abscissen der Parabolen, und könt dieselben nun leicht nach §. 384. Geom. beschreiben.

Auflösung durch die Trigonometrie: 1. Weil der Winkel OAH = CAB, und beide Dreiecke AHO und ABC rechtwinkelicht sind, so sind sie einander ähnlich, und also kan man setzen:

$$AB : AC = AH : AO$$

und $$AB : BC = AH : HO$$

folglich ist $$\frac{AC \times AH}{AB} = AO$$

und $$\frac{BC \times AH}{AB} = HO$$

oder

3. Beschreibet auf AD als auf einer Sehne einen Zirkelbogen AGD, welcher den Winkel AFD = AGD = ACB mit seiner Spitze am Umkreise stehend fassen kan, folgender Gestalt: da euch der Tiefenwinkel BAC gegeben ist, und das Dreieck ACB rechtwinkelicht ist, so wird euch auch der Winkel ACB, und sein Supplement ACV auf 180° bekant. Teilet also ACV in zween gleiche Teile, machet so wohl GAD als GDA dem halben Winkel ACV gleich, und suchet mittelst AG und DG als zwo Sehnen den Mittelpunkt O, aus welchen ihr mit dem Radius AO oder OG den verlangten Bogen AGD beschreiben könt §. 60. Geom. oder kürzer: machet DAO = CAB, teilet AD in zween gleiche Teile AH und HD, und errichtet in H die Perpendikular OG, so wird der Mittelpunkt O des verlangten Bogens im Durchschnitte der zwo Linien AO und OG sein.

4. Verlängert CB, bis sie den gemachten Bogen in zween Orten wie hier in F und E durchschneidet, oder nach Umständen etwan in G nur berühret, und ziehet AF und AE, so werden FAB und EAB die zween Erhöhungswinkel sein, in welchen man mit der beidem Probwurf angewandten Kraft den unter dem Horizont liegenden Gegenstand C erreichen wird.

Der Beweis ist gänzlich wie der von der vorhergehenden Aufgabe, und ist das, was daselbst noch besonders angemerkt worden auch hier zu verstehen.

Verlangte man die horizontalen Wurfweiten AM und AP; die man in diesem Erhöhungswinkel EAM und FAP mit der vorigen Kraft erreichen würde, zu finden, um die zwo Parabolen ARM und ATP um so bequemer beschreiben zu können,

so

so ziehet mit dem Radius HA aus H den halben Zirkel DZA, aus L und N, wo die Richtungslinien AE und AF denselben durchschneiden, lasset die Perpendikularen LM und NP auf AB fallen, so sind AM und AP die verlangten Wurfweiten. §. 102. Teilet man nun dieselbe in S und U in zween gleiche Teile, und errichtet die Perpendikularen SR $= \frac{LM}{4}$, und UT $= \frac{PN}{4}$ so habt ihr die Höhen oder die grösten Abscissen der Paraboken, und könt sie nach §. 384. Geomet. beschreiben.

Auflösung durch die Trigonometrie: 1. Das Dreieck AHO ist rechtwinkelicht, und der Winkel HAO ist = CAB und HA $= \frac{AD}{2}$ ist bekant, folglich auch der Winkel AOH, derowegen ist:

$$\text{Sin AOH} : \text{Sin tot} = AH : AO$$

und also $$\frac{\text{Sin tot} \times AH}{\text{Sin AOH}} = AO$$

nicht minder $$\text{Sin tot} : \text{Sin HAO} = AO : HO$$

folglich $$\frac{\text{Sin HAO} \times AO}{\text{Sin tot}} = HO$$

ferner ist HI = AB, und HI — HO = OI.

Dann ist in dem Dreieck OIE die Seite OI und OE = AO bekant, also ist:

$$OE : OI = \text{Sin tot} : \text{Sin OEI}$$

und $$\frac{OI \times \text{Sin tot}}{OE} = \text{Sin OEI}$$

folglich $90° - OEI = EOI$.

Endlich ist $HOD + DOE + EOI = 180°$

und $180° - HOD - EOI = DOE$.

$$\frac{DOE}{2} = DAE$$

und also DAB = 90° — DAE = EAB dem grössern Erhöhungswinkel.

ferner ist EOI = IOF

und $\frac{EOF}{2}$ = EAF. §. 77. Geomet.

folglich ist EAB — EAF = FAB dem kleinern Erhöhungswinkel.

Da die Auflösungen einiger der vorhergehenden Aufgaben etwas weitläufig, und daher in der Ausübung unbequem sind, so wollen wir aus nachstehenden Lehrsatz Gründe ziehen, die uns einen kürzern und eben so richtigen Wege, ia auf eine sehr einfache praktische Art führen, obstehende Aufgaben leicht und geschwind aufzulösen.

Lehrsatz.

§. 112. Die Brennpunkte aller durch einerlei Kraft aber in verschiedenen Erhöhungswinkeln beschriebenen Parabolen eines geworfenen Körpers stehen auf dem Umkreis eines Zirkels, der aus dem Ort des Wurfs mit einem Radius, welcher der halben Wurfsweite in 45ten Grade, oder der ganzen in 15ten Grade gleich ist, beschrieben wird.

Fig. 21. Beweis: Es seien AIC und AVD zwo Parabolen, die mit einerlei Kraft aber in verschiedenen Erhöhungswinkeln TAC und XAD beschrieben worden, und AE perpendikular auf AD = $\frac{1}{4}$ der senkrechten Wurfshöhe, die mit eben der Kraft erreicht werden kan. Da nun $\frac{1}{4}$ dieser Wurfshöhe in allen mit einerlei Kraft und in verschiedenen Erhöhungswinkeln beschriebenen Para-

Parabolen ihren gröſten Abſciſſen mehr $\frac{1}{4}$ des Parameters der Achſen derſelben gleich iſt §. 106. d. i. weil AE = LN = LI + IN, und AE = MP = MV + VP iſt, ſo ſind, wenn man IF = IL, und VO = VP = $\frac{1}{4}$ des Parameters der Achſen macht, F und O die Brennpunkte der zwo Parabolen §. 358. Geomet. Weil ferner FA = FC = LN = AE, und OA = OD = MP = AE iſt §. 359. Geomet. ſo ſind AE, AF, AO = $\frac{1}{4}$ der ſenkrechten Wurfshöhe und Radien eines Zirkels, an deſſen Umkreis EFOC die Brennpunkte der zwo mit gleicher Kraft und in verſchiedenen Erhöhungswinkeln beſchriebenen Parabolen ſich befinden. Da ferner die Wurfweite in 45° gleich der halben ſenkrechten Wurfshöhe, die Wurfweite in 15° aber gleich $\frac{1}{4}$ dieſer Wurfshöhe iſt, ſo iſt die Wurfweite in 15° gleich dem Radius AE des Zirkels, auf welchen die Brennpunkte dieſer mit einerlei Kraft und in verſchiedenen Erhöhungswinkeln beſchriebenen zwo Parabolen ſich befinden, und gleich wie dieſes von denſelben erwieſen worden, ſo läſt es ſich auch von allen übrigen erweiſen.

Zuſatz.

§. 113. Da die Winkel EAF und EAO den dopelten Erhöhungswinkeln gleich ſind §. 366. Geom. ſo erhält man die Erhöhungswinkel EAT und EAX, wenn man erſtlich mit dem Radius AE aus A den Bogen EFS beſchreibet, und ihn mit eben demſelben aus C und D in F und O durchſchneidet, dann aber die

Bögen EF und EO in zween gleiche Teile teilet, und durch diese Teilungspunkten die Linien AT und AX ziehet. Weil ferners der dopelte Erhöhungswinkel von 45° gleich 90° = EAC ist, und einer dessen Schenkel durch den Brennpunkt der Parabol gehet, so muß der Brennpunkt einer in 45ten Grad beschriebenen Parabol auf die Mitte C der Wurfweite AB selbst fallen, und dieselbe ist also die Ordinate die durch den Brennpunkt gehet.

Zusaz.

§. 114. Da man iede Wurfweite, so kleiner als die in 45° ist, in zween Erhöhungswinkeln erreichen kan, und wir den höhern von beiden bereits §. 113. zu finden gelehrt haben, so erhält man auch den niederern, wenn man die mit dem Radius AE aus A und D beschriebenen Bögen so weit unter AB verlängert, bis sie sich in einem zweiten Ort S durchschneiden, welcher alsdenn der Brennpunkt zur niederen Parabol ist, und teilet man den Bogen SE in zween gleiche Teile, und ziehet durch den Teilungspunkt die Linie AR, so wird EAR der niedere Erhöhungswinkel sein, in welchen man die gegebene Weite AD noch nebst dem andern erreichen kan.

Aufgabe.

§. 115. Wenn die mit einer gewissen Kraft in 45° oder 15° erreichte horizontale Wurfweite bekant; und man verlangt den Erhöhungswinkel zu finden, in welchen man mit der vorigen Kraft eine andere gegebene horizontale Weite erreichen kan.

Fig. 21. Auflösung durch die geometrische Beschreibung: 1. Ziehet die Linie AB unbestimt; errichtet an dem einen Ende derselben die Perpendikular AE gleich der gegebenen halben Wurfweite in 45ten oder der ganzen

in

im 15ten Grade, nach einem beliebigen veriüngten Maasstab, und beschreibet mit dem Radius AE den Bogen EOS.

2. Traget die neu gegebene Wurfweite auf die Linie AB aus A in D, und mit einem dem vorigen Radius AE gleichen DQ beschreibet aus D den Bogen QOS.

3. Durchschneiden sich nun beide Bögen in zween Punkten wie hier in O und S, so sind diese Durchschnitte die Brennpunkten der zwo Parabolen, in welchen die gegebene Weite AD erreicht werden kan, §. 112. und teilet man die Bögen EO und ES in zween gleiche Teile, und ziehet durch die Teilungspunkte die Linien AX und AR, so sind EAX und EAR die zween verlangten Erhöhungswinkel.

4. Ereignet es sich aber, daß sich beide Bögen nur in einem Punkt berühren (welches damals geschiehet, wenn die neugegebene Weite dopelt so gros, als die im 15ten Grad ist) so kan dieselbe nur in 45ten Grad allein erreicht werden, und wenn sich die zween Bögen weder durchschneiden noch berühren, so ist es ein Zeichen, daß die gegebene Weite mit dieser Kraft gar nicht erreicht werden könne.

5. Machet EQ parallel zu AB, und auf AB errichtet durch O und S die Perpendikular PS. Teilet OP in zween gleiche Teile, so ist V der Scheitelpunkt und VP = VO = $\frac{1}{4}$ Parameter der höhern Parabol. Eben so findet ihr den Scheitelpunkt und viertel Parameter der niederen Parabol, wenn ihr SP in zween Teile teilet. Nun wird es auch leicht sein die Parabolen selbst nach §. 360. Geomet. zu beschreiben.

Trigonometrische Auflösung: Da ihr in dem Dreiecke AMO die Seite AO als die Wurfweite in 15ten Grade, und AM als die Hälfte der gegebenen kennet, so findet ihr den Winkel OAM nach §. 433. Geomet., folglich ist 90° — OAM = EAO, und $\frac{EAO}{2}$ = EAX dem Erhöhungswinkel von der Vertikal abwärts gerechnet.

Zusatz.

§. 116. Solte anstaat der Wurfweite in 15ten oder 45ten Grade eine andere gegeben sein, oder der Probwurf in keinen von beiden Winkeln gemacht können werden, so läst sich der Radius des zur vorigen Auflösung nöthigen Bogens, d. i. die Wurfweite in 15ten Grade dennoch leicht folgender Gestalt finden, nehmlich: errichtet auf der halben gegebenen Wurfweite eine Perpendikular MP, machet den Winkel EAO gleich dem gegebenen dopelten Erhöhungswinkel, so ist der Durchschnitspunkt O des Schenkels dieses Winkels und der Perpendikular MP der Brennpunkt, und AO der verlangte Radius, oder die Wurfweite in 15ten Grad.

Zusatz.

§. 117. Hätte man die Wurfweite in 15ten Grad bekant, und man verlangte zu wissen welche horizontale Weite man in einem andern gegebenen Erhöhungswinkel erreichen würde, so ziehet die Linie AB, und AE perpendikular darauf; und mit dem Radius, der gleich der Wurfweite in 15ten Grad ist, beschreibet den Bogen EOS, ferner machet den Winkel EAO gleich dem dopelten des gegebenen Erhöhungswinkel, so ist O der Brennpunkt. Setzet hierauf den Zirkel in O und mit der Eröfnung OA durchschneidet AB in D, so ist AD die verlangte Wurfsweite. §. 112.

Auf-

Aufgabe.

§. 118. Wenn die mit einer gewissen Kraft in 15ten Grad erreichte horizontale Wurfweite bekant ist, wie der Erhöhungswinkel, in dem man mit eben der Kraft einen über dem Horizont erhobenen Gegenstand treffen kan, zu finden? Fig. 22.

Auflösung durch geometrische Beschreibung:

1. Suchet die schiefe Wurfsweite AD nach §. 542. Geomet. oder auf was immer für Art; messet auch den Höhenwinkel DAB, so findet ihr die Höhe DB des Objekts über dem Horizont, und die Horizontalweite AB nach §. 435. Trigon.

2. Ziehet AB, und machet sie nach einem beliebigen veriüngten Maasstab der gefundenen horizontalen Wurfweite gleich; errichtet auf derselben die Perpendikularen AE und BQ, und traget die gefundene Höhe des Objekts über dem Horizont aus B in D.

3. Aus A beschreibet mit einem Radius AE, der gleich der Wurfweite in 15ten Grad ist, den Bogen EOS, und aus D mit einem Radius DQ = AE — BD den Bogen QOS, so werden die Durchschnitspunkten O und S beider Bögen die Brennpunkten der zwo Parabolen sein, in welchen man den Gegenstand D erreichen kan, und EAO und EAS sind die dopelten Erhöhungswinkel. Folglich wenn man die Bögen EO und ES in zween gleiche Teile teilet, und durch die Teilungspunkten die Linien AT und AX führet, so sind EAT und EAX die verlangten zween Erhöhungswinkel von der Vertikal angerechnet.

4. Ereignet es sich, daß die Bögen anstaat sich zu durchschneiden sich nur in einem Punkte berühren, so ist der Berührungspunkt der Brennpunkt, und der Gegenstand

ist alsdann auch nur in einen Erhöhungswinkel allein zu erreichen. Durchschneiden oder berühren sich aber die Bögen gar nicht, so ist auch nicht möglich den Gegenstand mit dieser Kraft zu erreichen, sondern es mus eine grössere angenommen werden.

5. Auf AB errichtet aus O und S die Perpendikularen CL und FS, führet EQ parallel zu AB, und teilet CO und FG in zween gleiche Teile, so werden die Teilungspunkten I und G die Scheiteln der zwo Parabolen, CI = IO aber, und FG = GS die Viertelparameter sein, und ihr werdet nun die Parabolen leicht nach §. 360. Geomet. beschreiben können.

Der Beweis des Verfahrens gründet sich gänzlich auf den Lehrsatz §. 112.

Trigonometrische Auflösung: 1. In dem Dreieck AOD kennet ihr die schiefe Wurfweite AD, die Wurfweite in 15ten Grad = AO, und OD = AO — BD; also läst sich auch der Winkel OAD finden §. 442. Geomet.

2. Addiret ihr zu OAD noch den gemessenen Höhenwinkel DAB, so ist EAB = 90° — OAB = EAO, und $\frac{EAO}{2}$ = EAT dem höhern Erhöhungswinkel.

3. Um auch den Erhöhungswinkel der einen Parabol zu finden, so suchet in dem Dreiecke ADS den Winkel DAS wie zuvor. Dann ist DAS — DAB = BAS, und EAB + BAS = SAE dem doppelten, und folglich $\frac{SAE}{2}$ = EAX dem niederern Erhöhungswinkel selbst.

Zu-

Zusatz.

§. 119. Obwohl die vorhergehende Aufgab einen Probwurf auf einer horizontalen Fläche und in 15ten Grad als bekant voraussetzet, und man dergleichen sonderlich in gebürgigten Gegenden sehr oft nicht machen kan, so läst sich nichts destoweniger auch mit Hülf eines in was immer für einen Winkel und auf einer mit dem Horizont schiefliegenden Fläche geschehenen Probwurf erstlich die mit eben dieser Kraft in 15ten Grad zu erreichende horizontale Wurfweite, und dann auch noch der Erhöhungswinkel, in welchen man ein neugegebenes und über dem Horizont liegendes Obiekt erreichen kan, folgender Gestalt finden. Nehmlich: Fig. 23.

1. Zeichnet ein rechtwinkelichtes Dreieck AFC, in welchen AF die schiefe, AC aber die mit dem Probwurf erreichte horizontale Weite, und CF die Höhe des Obiekts über dem Horizont vorstellet, nach einen beliebigen Maasstab.

2. Errichtet AE perpendikular auf AC, machet EAN gleich dem dopelten Erhöhungswinkel des Probwurfs, und ziehet AN unbestimt.

3. Traget CF aus A im G; setzet die Zirkelspitze in G, und nehmet auf GN verschiedene Weiten GH, GI, GM u. s. w. und sehet zu, wenn ihr den Zirkel umschlaget, ob die eine Spitze in F eintrift, d. i. ob GH = HF, oder GI = IF u. s. w. bis ihr endlich eine wie GL findet, welche würklich gleich LF ist; so ist AL die horizontale Wurfweite in 15ten Grade, und L der Brennpunkt der Parabol des Probwurfs §. 112.

4. Beschreibet nun aus A mit dem Radius AL den Bogen ELR; traget die neugegebene horizontale Weite

aus A in B; errichtet daselbst eine Perpendikular BD, und machet sie der neugegebenen Höhe des Obiekts über dem Horizont gleich.

5. Setzet in D ein, und mit einem Radius DO = AL — BD durchschneidet den vorigen Bogen in O, so ist O der Brennpunkt der neuen Parabol, und teilet man den Winkel EAO in zween gleiche Teile, und ziehet durch den Teilungspunkt die Linie AT, so ist EAT der gesuchte Erhöhungswinkel, in welchen man mit der beim Probwurf gebrauchten Kraft die schiefe Weite AD erreichen können wird.

6. Um nun auch die horizontale Wurfweite in 15ten Grade durch die trigonometrische Berechnung zu finden, so betrachtet, daß ihr in dem Dreiecke AGF den Winkel GAF = 90° — EAL — FAC samt der Seite AG und AF kennet, derowegen läst sich die Seite GF nach §. 440. Geomet. berechnen. Ferners, da GL = LF gemacht worden, so ist LGF = LFG, und weil LGF = GAF + GFA §. 91. Geomet. so sind euch in dem Dreiecke GFL die zween Winkel LGF und LFG nebst der Seite GF bekant, also könt ihr auch die andere GL nach §. 437. Geomet. finden, und dann ist GL + AG gleich der gesuchten horizontalen Wurfsweite in 15ten Grade, ist nun diese einmal bekant, so läst sich der Erhöhungswinkel EAT für die neugegebene schiefe Weite AD gänzlich nach §. 118. berechnen.

Aufgabe.

Fig. 24. §. 120. Wenn die mit einer gewissen Kraft in 15ten Grad erreichte horizontale Wurfweite bekant ist, wie der Erhöhungswinkel, in dem man mit eben der Kraft einen unter dem Horizont liegenden Gegenstand erreichen kan, zu finden?

Auf-

Auflösung durch geometrische Beschreibung: 1. Suchet die schiefe Wurfweite AD nach §. 542. Geomet. oder auf was immer für eine andere Art; messet auch den Tiefenwinkel BAD, damit ihr die Tiefe des Objekts BD unter dem Horizont, und auch die horizontale Weite AB nach §. 435. Geom. berechnen möget.

2. Ziehet eine Linie AB, und machet sie nach einem beliebigen verjüngten Maasstab der gefundenen horizontalen Wurfweite gleich; errichtet auf derselben die Perpendikularen AE und BQ, und traget die gefundene Tiefe des Objekts aus B in D abwärts.

3. Aus A beschreibet mit einem Radius AE, der gleich der horizontalen Wurfweite in 15ten Grade ist, den Bogen EOS, und aus D mit einem Radius DQ $= AE + BD$ den Bogen QOS, so werden die Durchschnitspunkten O und S beider Bögen die Brennpunkten der zwo Parabolen sein, in welchen man den Gegenstand D erreichen kan, und EAO und EAS sind die dopelten Erhöhungswinkel, folglich wenn man die Bögen EO und ES in zween gleiche Teile teilet, und durch die Teilungspunkten die Linien AT und AX führet, so sind EAT und EAX die verlangten zween Erhöhungswinkel.

Ubrigens ist alhier eben dasjenige wieder zu beobachten, was §. 118. Nr. 4 u. 5. erinnert worden, und der Beweis des Verfahrens gründet sich ebenfals auf §. 112.

Trigonometrische Auflösung: 1. Nachdem ihr an dem Dreiecke AOD, dessen drei Seiten bekant sind, den Winkel OAD berechnet habt, so ist

$$EAB + BAD - OAD = EAO$$

und $\frac{EAO}{2} = EAT$ dem grössern Erhöhungswinkel.

2.

2. In dem Dreiecke ADS sind ebensals wieder alle drei Seiten bekant, also låst sich wie zuvor der Winkel DAS finden, und dann ist EAB + BAD + DAS = EAS, und $\frac{EAS}{2}$ = EAX dem kleinern Erhöhungswinkel.

Was wir §. 119. von dem Probwurf auf ein über dem Horizont erhobenes Obiekt und von der Erfindung der horizontalen Wurfweite in 15ten Grade gesagt haben, verstehet sich auch Verhåltnismåssig, wenn der Probwurf auf ein unter dem Horizont liegendes Obiekt geschiehet; nur mit dem Unterschied, daß alsdann OD um BD långer als AO wird.

Obwohl die Auflösungen der lezt angeführten drei Aufgaben soviel möglich einfach sind, so erfordern sie dennoch einige Zeit, und ein ziemlich ruhiges Gemüth; da es aber bei ernstlichen Gelegenheiten oft sowohl an der einem, als auch an dem andern fehlet, so legen wir den Anfångern hiemit ein sehr einfaches Instrument vor, dessen Gebrauch sich gånzlich auf §. 112. gründet, und mittelst welchen ein ieder auch in der Mathematik ungeübter alle oben angeführte Aufgaben auf eine sehr leichte und mechanische Art, fast ohne allen Zeitverlust, und ohne eben ein sehr gesammeltes Gemüth nöthig zu haben, auflösen kan. Es bestehet aber dasselbe eigendlich in folgenden:

Fig. 25. 1. Die ganze Flåche des fig. 25. vorgestelten Instruments ist von 1 oder 2 Linien dicken Messingblech. Der aus dem Mittelpunkt A gezogene Viertelzirkel ist gegen dem aussern Rande in 90 Grade, und ieder derselben wieder in 6 gleiche

Teile

Teile oder von 10 zu 10 Minuten eingeteilet, in dieser Rucksicht wird der Radius desselben so gros angenommen, daß man diese kleineren Teile noch wohl entscheiden kan. Gegen dem innern Rande ist der Viertelzirkel nur in 45 gleiche Hauptteile geteilet, deren ieder wieder 6 kleinere enthält, damit wenn an der äusseren Einteilung eine gewisse Anzahl Grade und Minuten abgeschnitten wird, man an der innern so gleich die halbe Anzahl erhält; wie die Nothwendigkeit dessen in der Folge erhellen wird.

2. Die Scale ACDB ist in so viele gleiche Teile nach der Linie AB eingeteilet, als man mit einem gewissen in 45ten Grad gerichten Böller mit der grösten Ladung z. B. Klaster erreichen kan; AC und BD aber enthalten iede etwann nur 100 oder 150 solche Teile. Eben so ist die Scale AEFB eingeteilet, und die sich gegen über stehenden Teilungspunkten sind mit Linien zusammengezogen, davon nur einige nahe am Gradbogen treffende um alle Verwirrung zu vermeiden ausgelassen werden.

3. Das um den Mittelpunkt A des Gradbogens an einem Dorn bewegliche Lineale AI ist mit einer schrähen Kante versehen, darauf so nahe am äussersten Rande derselben als thunlich durch A eine Linie gezogen ist, welche ebenfals in die nehmliche gleiche Teile wie AB eingeteilet ist, aber nur die halbe Anzahl derselben enthält. Der Mittelpunkt A ist wegen der Dicke des Lineales etwas in die Tiefe ausgesenkt, damit er mit der Fläche der Skale in gleiche Höhe komt. Bei N ist eine Stelschraube angebracht, die durch den aus der Ursach durchaus durchgebrochenen Gradbogen gehet,

het, um das Lineal in allen Stellungen befesti-
Fig. 26. gen zu können. Die 26. Figur zeiget den Durchschnit dieser Schraube nach der Länge des Lineals.

Fig. 27. 4. Beim Gebrauch dieses Instruments ist noch ein leichter Stangenzirkel OP fig. 27. dessen Stange ungefähr die Länge von $\frac{AB}{2}$ hat, nebst noch einer halb so langen RS nöthig.

Übrigens kan das Instrument in ein ganz flaches Futeral dergestalt gerichtet werden, daß es auch bei dem Gebrauche beständig darin verbleiben kan, und man siehet wohl, daß wenn man an das bewegliche Lineale Dioptren anbringt, und das Instrument an seiner untern Fläche so einrichtet, daß man es auf ein Statif befestigen kan, daß es alsdenn auch als ein Winkelmesser zu gebrauchen seie, um die Entfernungen der Gegenstände zu finden.

Gebrauch.

Erste Aufgab: Wenn die mit einer gewissen Ladung in 15ten Grad erreichte Wurfweite bekant ist, wie der Erhöhungswinkel zu finden, in welchen man eine andere gegebene horizontale Wurfweite mit der nehmlichen Ladung erreichen kan?

Fig. 28. Auflösung: 1. Zählet auf der Skale des beweglichen Lineals AI soviel Teile von A gegen I bis O oder C, als ihr bei dem Probwurf in 15ten Grade Klafter erreicht habt; zählet auch auf der horizontal Linie AB der andern Skale soviel Teile von A nach D, als die neugegebene Wurfweite Klafter enthält, und merket beide Teilungspunkten C und D an.

2.

2. Ergreifet mit dem Stangenzirkel die Weite AO = AC, setzet die eine Spitze in C ein, ziehet das Lineale so lang mit fort, bis die andere Spitze in D einfält, so schneidet das Lineale in dieser Stellung auf der äussern Einteilung des Gradbogens den dopelten Erhöhungswinkel EAI ab, und auf der innern werdet ihr die Anzahl Grade und Minuten des Erhöhungswinkel selbst nachzählen können.

Zusatz: Wäre nach einem in 15ten Grade geschehenen Probwurf ein anderer Winkel gegeben, und man verlangte zu wissen, welche horizontale Entfernung man mit der vorigen Ladung in demselben erreichen wird, so stellet, und befestiget das Lineale mit der Stelschraube dergestalt, daß EAI dopelt so gros als der gegebene Winkel werde, welches ihr leicht erhaltet, wenn ihr auf der innern Einteilung soviel Grade und Minuten von E gegen C zählet, als der gegebene Erhöhungswinkel haben sol; nehmet AC = AF der Probwurfweite mit dem Zirkel, lasset eine Spitze in C stehen, und mit der andern durchschneidet die horizontale Linie AB in D, so wird AD die Anzahl Klafter enthalten, welche ihr in dem gegebenen Winkel mit der vorigen Ladung erreichen könt.

Zusatz. Ist man durch Umstände verhindert den Probwurf eben in 15ten Grade zu machen, man kan aber anstaat in diesem in einen andern Erhöhungswinkel werfen, und die damit erreichte Wurfweite AD messen, so läst sich nichts destoweniger die Wurfweite AF des 15ten Grades, oder vielmehr der Radius AC des Zirkels, worauf der

Brenn-

Brennpunkt der Parabol fallet, folgender Gestalt finden: nehmlich stellet das Lineale auf den dopelten Erhöhungswinkel EAI des gethanen Probwurfs, und befestiget dasselbe; nehmet mit dem Zirkel die Hälfte AN der bekanten Wurfweite AD, setzet beiläufig in der Gegend von C auf der Skale des Lineals in unterschiedene Teilungspunkten ein, bis ihr einen eben wie C findet, der so weit von der Linie AE abstehet, als die halbe Wurfweite AN beträgt, welches ihr durch einen mit der Erösnung AN des Zirkels aus C gegen L gemachten Bogen, der die Linie AE nur berühren mus, leicht erfahret, so wird AC die verlangte Wurfweite in 15ten Grad anzeigen, und nun läst sich die obige Aufgabe eben so auflösen, als wenn der Probwurf in 15ten Grade geschehen wäre.

Ubrigens ereignet es sich, daß die neugegebene Wurfweite grösser als die dopelte des Probwurfs in 15ten Grade ist, so läst sich dieselbe mit dieser Ladung auch in 45 Grad folglich gar nicht erreichen, und mus folglich eine stärkere Ladung angenommen werden.

Zweite Aufgab: Wenn die mit einem Probwurf in 15ten Grad erreichte horizontale Weite bekant ist, und es wird ein über oder unter dem Horizont liegender Gegenstand zu bewerfen gegeben; wie in solchen Falle der Erhöhungswinkel zu finden?

Auflösung: 1. Suchet euch sowohl den Höhen oder Tiefenwinkel, welchen der Gegenstand mit dem Horizont macht, als auch die horizontale

Ent-

Entfernung nebst der Höhe oder Tiefe nach den in der Trigonometrie hinlänglich und verschiedenen gegebenen Anleitungen, oder auf was immer sonst für eine Art bekant zu machen.

2. Ist der Gegenstand über den Horizont erhoben, so zählet von A gegen B zu so viele Teile auf der Skale bis F, als die horizontal Entfernung Klafter enthält, und von F perpendikular aufwärts so viele Teile bis D, als die Höhe des Gegenstandes über den Horizont beträgt, und merket indessen den Punkt D. Fig. 29.

3. Traget die bekante Wurfweite in 15ten Grad aus A in C, und die Höhe des Gegenstandes FD aus A in L; ergreifet mit dem Zirkel die Weite LC, bleibet mit der einen Spitze in C stehen; ziehet das Lineale mit derselben so lang nach, bis die andere Spitze in D einfält, so ist EAI der dopelte Erhöhungswinkel, in welchem ihr den erhobenen Gegenstand D erreichen könt, und ihr werdet auf der innern Einteilung des Gradbogens so gleich die Anzahl Grade und Minuten, so ihr dem Erhöhungswinkel selbst geben müsset, nachzählen können.

4. Wäre aber der Gegenstand unter dem Horizont gelegen, so nehmet auf AB so viele Teile AH als dessen horizontal Entfernung Klafter beträgt, desgleichen soviel Teile HG als seine Tiefe Klafter enthält, und bemerket indessen den Punkt G. Machet AC gleich der Probwurfweite in 15ten Grad, und AN = HG; ergreifet mit dem Zirkel die Weite NC, bleibt mit der einen Spitze in C stehen, ziehet das Lineale so

lang damit fort, bis die andere Spitze in G einfält, so schneidet das Lineale in dieser Stellung ebenfals den dopelten Erhöhungswinkel EAI ab, und auf der innern Einteilung kont ihr die Anzahl der Grade und Minuten des Erhöhungswinkels selbst nachzählen.

Zusatz: Da man sonderlich in gebürgigten Gegenden nicht allezeit Gelegenheit haben dörfte, einen Probwurf auf einer horizontalen Ebne zu machen, so kan man denselben auch in einem beliebigen Winkel und gegen ein über oder unter dem Horizont liegendes Obiekt verrichten. Suchet euch hierauf dessen horizontale Entfernung und die Höhe oder Tiefe über oder unter dem Horizont durch die Trigonometrie bekant zu machen; nehmet auf der Linie AB soviel Teile AF als die horizontale Entfernung, und, wenn es ein erhobner Gegenstand ist, auf FD soviel als die Höhe desselben beträgt; stellet hierauf das Lineal auf den dopelten Erhöhungswinkel EAI des Probwurfs, traget FD aus A in L, probiret mit dem Zirkel aus L gegen C verschiedene Weiten, bis ihr eine wie LC findet, die gleich CD ist; d. i. wenn ihr mit der Erösnung LC des Zirkels in C einsetzet, daß die eine Spitze in D eintrefe, so ist AC gleich der verlangten horizontalen Wurfweite in 15ten Grad. Wäre aber der Probwurf nach einem tiefliegenden Obiekt geschehen, so traget dessen Tiefe HG aus A in N, und suchet ebenfals wieder eine Linie NC die gleich CG ist; wie gleich oben gesagt worden, so wird AC wieder die verlangte horizontale Wurfweite in 15ten Grad oder vielmehr der Radius eines Zirkels sein, auf den alle Brennpunkte der Parabolen fallen,

wel-

welche durch einerlei Kraft und in verschiedenen Erhöhungswinkeln beschrieben werden können, folglich läst sich nun auch mit Hülfe dieses Probwurfs der Erhöhungswinkel für was immer für eine Entfernung, und der Gegenstand mag auch über oder unter dem Horizont liegen, wie in der zweiten Aufgabe gewiesen worden, finden.

Übrigens verstehet es sich von selbst, wenn ein Gegenstand soweit entfernet ist, daß man denselben mit der erforderlichen Weite CL oder CN in dem man in C einsetzet, nicht durchschneiden kan, man mag das Lineal gleich nach sich ziehen wie man wil, daß alsdenn die Ladung zu schwach ist.

Aufgabe.

§. 121. Wenn von einem nach horizontaler Richtung AB geschehenen Wurf oder Schuß sowohl die damit erreichte horizontale Weite AB = ED und auch die Wirkung der Schwere BD = AE bekant, oder gemessen worden, und es wird eine andere kürzere Entfernung EI aber in eben dem Horizont gegeben; wie sowohl der Senkungswinkel BAN unter dem Horizont, als auch der Erhöhungswinkel RAB in welchen beiden man mit voriger Ladung die gegebene Entfernung erreichen kan, zu finden? Fig. 30.

Auflösung durch geometrische Beschreibung:

1. Ziehet eine Linie AB gleich der horizontalen Probwurfweite; errichtet AE gleich der Würkung der Schwere perpendikular darauf, verlängert sie gegen P, und ziehet ED parallel zu AB, und DB zu AE, so ist AE die gröste Abscisse und ED die halbe Ordinate der Parabol des horizontalen Probwurfs oder Schuß.

2. Suchet zu AE und ED eine dritte Proportional §. 133. Geomet. so ist solche der Parameter der Parabol §. 351. nehmet davon den vierten Teil, und beschreibet damit als mit einem Radius AF aus A den Bogen OFCP, so ist A der Scheitel, F der Brennpunkt der Parabol AD, P aber der Punkt durch welchen die Direktrix gehet, §. 358. Geomet.

3. Zu AB ziehet die Parallel GM durch P, und aus I errichtet die Perpendikular IH auf ED; mit dem Radius IH beschreibet aus I den Bogen HCO; so sind die zween Durchschnitspunkten C und O die Brennpunkten der zwo neuen Parabolen.

4. Teilet den Bogen PC in T und PO in S in zween gleiche Teile, und ziehet durch die Teilungspunkten die Linien AR und AN, so ist RAB der verlangte Erhöhungswinkel, und BAN der Senkungswinkel.

5. Um auch noch beide Parabolen zu beschreiben, lasset erstlich durch C auf AB eine Perpendikular VC fallen, teilet VC in zween gleiche Teile, so ist U der Scheitelpunkt der Parabol AUI des Erhöhungswinkels, und ihr könt sie nach §. 360. Geom. beschreiben. Ferner führet zu EP durch O die Parallel OG, teilet sie in zween gleiche Teile, so ist X der Scheitelpunkt zu dem Stück AI der Parabol für dem Senkungswinkel, und da G der Punkt ist, durch welchen die Direktrix gehet, so kan die Beschreibung ebenfals nach §. 360. Geomet. geschehen.

Trigonometrische Auflösung: 1. Um den Erhöhungswinkel RAB zu finden, betrachtet, daß in dem rechtwinkelichten Dreieck AEI die Seite AE als die Würkung der Schwere, und EI als die gegebene

Wei-

Weite bekant sei, derowegen findet ihr AI und auch den Winkel EAI nach §. 432. Geomet. und EAB $= 90° - EAI = IAB$.

2. In dem Dreieck AIC ist $AC = \frac{1}{4}$ Parameter des Probwurfs; $IC = HI = AP + AE$ d. i. gleich $\frac{1}{4}$ Parameter mehr der Würkung der Schwere; und AI ist aus dem vorigen Dreieck bekant, also findet ihr den Winkel CAI nach §. 442. Geom.

3. Ist $PAB + BAI - CAI = PAC$, und $\frac{PAC}{2} = PAR$, folglich $PAB = 90° - PAR =$ RAB dem Erhöhungswinkel.

4. Um den Senkungswinkel BAN zu finden, so betrachtet, daß euch in dem Dreieck AIO die Seite $AO = \frac{1}{4}$ Parameter des horizontalen Wurfs; $IO = IH = \frac{1}{4}$ Parameter mehr der Würkung der Schwere $IY = BD$, und AI aus dem Dreiecke AEI bekant sei, derowegen läßt sich der Winkel OAI nach §. 442. Geomet. berechnen.

5. Endlich ist $OAI + IAB + BAP = OAP$, und $\frac{OAP}{2} = PAN$, also $PAN - PAB = BAN$ dem Senkungswinkel.

Wir übergehen die weitere Ausdehnung dieser Aufgabe, weil sie wenigsten beim Bomben werfen, als wo keine horizontale noch weniger aber eine gesenkte Richtung staat haben kan, nicht anwendbar ist; und bei Haubitzen und Stucken än-

 dert

dert der Widerstand der Luft die Wurfweiten so gewaltig, daß man in der Ausübung mit dieser Bestimmungsart nicht wohl zu recht komt. Diese Aufgabe wird also nur hergesetzt, um den Anfängern zu zeigen, daß der §. 112. gegebene Lehrsatz sich auch auf die horizontalen und gesenkten Schüsse noch anwenden liesse, wenn die hindernden Nebenursachen so darbei vorkommen, nicht so groß wären.

Es ist kein Zweifel, daß man mittelst den in diesem Lehrgebäude gegebenen Regeln die Bomben und Kugeln mit erwünschter Richtigkeit nach einem gegebenen Ziele werfen und schiessen können würde, wenn nicht so viele Nebenursachen als Hindernisse, wie bei vielen andern Unternehmungen nur alzu oft zu geschehen pflegt, sich bei der Ausübung einfänden. Damit die noch unerfahrnen Anfänger um so mehr einsehen mögen, daß man ihnen diese Regeln nicht als unumstößliche Wahrheiten aufzudringen, sondern nur als eine Annäherung zur Wahrheit anzubieten suche, so wollen wir sie in folgenden mit den wichtigsten Nebenursachen, welche die Würfe und Schüsse so oft von den Regeln abirren machen, vorläufig bekant machen, das übrige aber bis zur Aerometrie verspahren.

Ersten: Wird in dem gegebenen Lehrgebäude überhaupt angenommen, daß die treibende Kraft, oder die Kraft des Pulvers für sich allein betrachtet eine gleichförmige Bewegung herfürbringe; da man aber durch vielfältige Erfahrungen überzeugt ist, daß die Luft den geworfenen Körpern gewaltig widerstehet, so muß nothwendig ihre anfänglich von der Kraft des Pulvers erhaltene Geschwindigkeit sich alle Augenblicke vermindern, und

also

also eine abnehmende Bewegung entstehen; sobald aber diese staat hat, so kan der geworfene oder geschossene Körper keine wahre Parabol beschreiben, sondern muß einer andern Art von krummen Linien in seinem Fluge folgen, und alle Wurf und Schußweiten müssen kürzer ausfallen, als sie durch die gegebenen Regeln, indem man die Fluglinie als eine Parabol ansieht, bestimt werden. Viele gelehrte Männer haben sich Mühe gegeben, die eigentliche Fluglinie der in der Luft geworfenen und geschossenen Körper zu bestimmen, und man hat von ihnen durch Hülfe der höhern Mathematik hierüber schon mehrere schöne Erfindungen erhalten. Allein! da die nähere Kenntnis der Eigenschaften der Luft unglücklicher weise noch ziemlich mangelhaft, folglich die eigentliche Grösse des Widerstandes derselben gegen geworfene oder geschossene Körper noch nicht sicher ausgemacht ist; nebst diesem auch die anfängliche Geschwindigkeit dieser Körper sehr schwer in allen Fällen richtig genug bestimt werden kan, welche beide Stücke zur Bestimmung der wahren Fluglinie doch unumgänglich nöthig sind, so müssen auch diese an sich sehr schöne Erfindungen bisher noch grösten Teils auf der Voraussetzung einer gewissen Grösse des Widerstandes, und der anfänglichen Geschwindigkeit so lang beruhen, bis die menschliche Kenntnis hierinnen noch mehr erweitert sein wird.

Warum wir aber das Lehrgebäude von geworfenen Körpern, in welchen die Fluglinie als eine Parabol angesehen wird, in gegenwärtigen Anfangsgründen vor andern angenommen haben, geschiehet nicht soviel, als ob wir demselben einen würklichen Vorzug vor den übrigen später erfunde-

nen einzuräumen gedächten, sondern erstlich: weil zur Behandlung der leztern die höhere Gründe der Mathematik erfordert werden, und die dem gegenwärtigen Werke eigens vorgeschriebenen Gränzen bis dahin zu gehen uns nicht erlauben. Zweiten: weil die bei dem erstern in der Ausübung vorkommende Berechnungen viel einfacher, und in dem Getümel einer Batterie viel leichter als in allen bisher erfundenen übrigen auszuführen möglich sind, und damit dennoch eine noch ganz erträgliche Richtigkeit wenigsten beim Werfen erhalten wird; sonderlich aber wenn man den Probwurf so einzurichten suchet, daß man mit demselben die neugegebene Wurfweite schon beinahe erhält, oder daß die Elevationswinkel des Probwurfes und des neu zu machenden Wurfes nicht sehr viel von einander unterschieden sind; welches entweder aus schon bekanten Versuchen, und bei Handen habenden Wurftafeln, oder durch zween Probwürfe eben nicht schwer zu bewürken ist.

Zweiten: Man mag annehmen, daß die geschossenen oder geworfenen Körper entweder eine Parabol beschreiben, oder man mag ihre würkliche Fluglinie nach was immer für einer andern Art bestimmen, so muß man doch bei allen Berechnungen der Schuß und Wurfweiten, oder der Elevationswinkel derselben nothwendig voraussetzen, daß gleiche Pulverladungen in einem nehmlichen Geschütze gegen gleiche Kugeln oder Bomben auch gleiche Kräfte ausüben. Wer aber nur einige Erfahrung von den Eigenschaften des Pulvers hat, der wird auch wissen, daß hierzu unumgänglich erforderlich seie, daß das Pulver sowohl in Ansehung seiner innerlichen Beschaffenheit und Güte, als seiner

Tro-

Trockenheit, und Grösse seiner Körner durchaus gleich seie; daß die Ladung in dem Geschütze allezeit gleiche Lage erhalte, und auf gleiche Art durch eine gleiche Menge Feuerfunken entzunden werde. Fehlet nur eine von diesen Bedingungen, so geschiehet die Entzündung der Pulverladung nicht ein wie das anderemal, die Kugel oder Bombe erhält eine grössere oder kleinere Geschwindigkeit, und die Voraussetzung ist nicht mehr richtig.

Dritten: Nicht minder muß bei der Berechnung der Schuß und Wurfweiten oder ihrer Elevationswinkel vorausgesetzt werden, daß alle Kanonkugeln und Bomben nicht allein von gleichen Durchmesser und Schwere sind, sondern auch daß der Mittelpunkt ihrer Schwere sich an den Kanonkugeln in ihrer Mitte, an den Bomben aber auf der durch das Brandloch gehenden Achse befinde. Sind aber diese Körper in einer dieser Eigenschaften merklich unterschieden, wie es würklich nicht selten geschihet, so sehr auch ihre Erzeugung schon verbessert worden ist, so wird die Voraussetzung abermal unrichtig.

Vierten: Muß man ebenfals annehmen, daß die Kugeln und Bomben bei dem Abfeuern allezeit in der Richtung abfahren, welche dem Geschütz gegeben worden ist; allein, da man denselben bisher noch immer einen beträchtlichen Spielraum lassen muste, so können sie oft aus verschiedenen zufälligen Ursachen im herausfahren an die eine Wand der Seele angeschleidert, und also nach der entgegen gesetzten Seite von ihrer wahren Richtung abgetrieben werden, welches durch die an dem Geschütze öfters zurückgelassene sehr sicht-

baren Merkmale oder Streifen an dem Metalle augenscheinlich bestättiget wird. Da über dieses bei der Entzündung der Ladung, sonderlich wenn sie etwas stärker, oder das Geschüß von leichterer Art ist, eine gewaltige Erschütterung erfolget, bei den Böllern auch ein häftiger Druck gegen die Bettungen geschihet, bei welchen man nicht wohl voraussetzen kan, daß alle Teile derselben gleich viel widerstehen, so ist sehr begreiflich, wie manchesmal die Kugeln oder Bomben eine andere Richtung, als dem Geschüße gegeben, oder in der Berechnung angenommen wird, erhalten können.

Fünften: Da endlich die Beschaffenheit der Luft in die Bahne der geschossenen oder geworfenen Körper ebensfals ihren Einfluß hat, so ist auch noch nöthig, daß man sie stäts von gleicher Dichtigkeit und Stille annehme. Obwohl zwar in derselben in sehr kurzer Zeit, und gewöhnlicher Weise eben keine sehr merkliche Veränderungen vorzugehen pflegen, so findet man sie doch öfters von Früh bis Mittag, ia auch manchesmale schon von einer Stunde zur andern so verschieden, daß sie durch ihren verschiedenen Widerstand die berechnete Bahne der geschossenen oder geworfenen Körper gar wohl auf eine merkliche Art verändern kan.

Aus diesen angeführten Nebenursachen und Hindernissen werden die Anfänger leicht schliessen, daß die Unrichtigkeit im Werfen eben nicht soviel von der Berechnungsart, als von den vorkommenden neben Ursachen herrühren, die Sich durch keine Berechnung heben oder bestimmen lassen; ia die Abirrungen werden noch weit beträchtlicher sein, wenn mehrere zusammen kommen, und sich einander nicht zufälliger Weise wieder grösten Teils selbst aufhebten, oder vernichteten.

Fünf-

Fünftes Hauptstück.

Von dem Stose der Körper.

Erklärung.

§. 122. Ein grader Stoß eines Körpers gegen einen andern ist derienige, wenn die Richtungslinie der Bewegung des ersten senkrecht auf den andern austrift, und durch beider Mittelpunkte gehet.

Ein schiefer Stoß aber ist, wenn die Richtungslinie des stossenden Körpers auf den andern schief auftrift, oder nicht durch den Mittelpunkt gehet.

Z. B. Wenn die Kugel A dergestalt gegen die Kugel B stosset, daß ihre Richtungslinie CD durch die Mittelpunkte beider Kugeln gehet, und folglich senkrecht auf die andere trift, so wird ein gerader Stoß entstehen; gehet aber die Richtungslinie EF nicht durch den Mittelpunkt von B, so wird sie von der Kugel A schief gestossen. Fig. 31.

Lehrsatz.

§. 123. Wenn ein nicht elastischer Körper A an einen andern ebenfals nicht elastischen B, der sich langsamer aber in der nehmlichen Richtung wie der erste beweget, stosset, so ist die Summe der Bewegungskräfte von beiden nach dem Stose gleich der Summe derselben vor dem Stose.

Beweis: Es seie die Bewegungskraft des Körpers A vor dem Stose $= Q$, die von B $= q$; so ist ihre Summe $= Q + q$. Wenn nun A an B stosset, so wider-

widerstehet A soviel, als B in ihn würket, §. 17., und diese Würkung wollen wir d nennen; da nun dieselbe der Richtung A gerade entgegen ist, so verliert A nach dem Stose an seiner Bewegungskraft, und dieselbe ist alsdann $= Q - d$, da ferner auch A in B eben soviel würket, §. 17., diese Würkung aber der Richtung der Bewegung von B nicht entgegen ist, sondern derselben vielmehr folget, so gewinnet B an der Bewegungskraft, und solche wird nach dem Stose $= q + d$ sein. Addiret man nun die Bewegungskräfte beider Körper nach dem Stose zusammen, so siehet man, daß $Q - d + q + d = Q + q$ seie.

Zusatz.

§. 124. Ist der Körper vor dem Stoß in Ruhe, so ist seine Kraft der Bewegung damals $= 0$, und wenn des Körpers A seine $= Q$ ist, so ist ihre Summe von dem Stose $= Q + 0$, ferner ist wegen der gegenseitigen Würkung der Körper die Kraft der Bewegung von A nach dem Stose $= Q - d$, und von $B = 0 + d$, und folglich ihre Summe $= Q - d + d$, d. i. die Summen der Kräften der Bewegung sind vor und nach dem Stose gleich, wenn ein nicht elastischer Körper an einen eben solchen ruhenden stosset.

Lehrsatz.

§. 125. Wenn zween Körper sich nach entgegengesetzter Richtung bewegen, und stossen, so ist der Unterschied ihrer Bewegungskräfte vor dem Stose gleich der Summe derselben nach dem Stose.

Beweis: Wenn man die vorige Benennungen beibehält, und annimt, daß $Q > q$ seie, so ist der Unterschied der Bewegungskräfte von A und B vor dem

Sto-

Stose $= Q - q$. Weil nun beide Körper entgegengesetzte Bewegungen haben, so wird die grössere Bewegungskraft die kleinere gänzlich aufheben, und auch noch den Körper B nach der Richtung des ersten mit einer Kraft d mit fortführen; folglich wird wegen dem auch nach dem Stose noch anhaltenden Widerstand des Körpers B gegen A die Kraft der Bewegung des leztern nach dem Stose $= Q - q - d$ sein. Addirt man nun die in ieden Körper nach dem Stose noch vorhandenen Kräften zusammen, so siehet man, daß $Q - q - d + d = Q - q$ seie. Auf eine ähnliche Art läst sich das nehmliche erweisen, wenn man $Q < q$ annimt.

Zusaz.

§. 126. Haben zween nach entgegengesezter Richtung sich stossende Körper A und B gleiche Massen, und Geschwindigkeiten, so sind auch die Bewegungskräfte Q und q vor dem Stose einander gleich §. 28., folglich ist ihr Unterschied $= 0$; da nun gleich erwiesen worden, daß der Unterschied der Bewegungskräfte vor dem Stose gleich der Summe derselben nach dem Stose seie, so muß nothwendig nach dem Stose in gegenwärtigen Falle keine Bewegungskraft mehr vorhanden sein, sondern beide Körper müssen in die Ruhe kommen.

Lehrsaz.

§. 127. Wenn ein unelastischer Körper an einen andern ruhenden von eben der Art gerade anstosset, so verhält sich die Geschwindigkeit nach dem Stose zu der Geschwindigkeit vor dem Stose, wie die Masse oder das Gewicht des erstern zu der Summe der Massen oder der Gewichter von beiden.

Be-

Beweis: Es seie die Masse des Körpers A = M, seine Geschwindigkeit vor dem Stose = C; also ist dessen Kraft der Bewegung = MC §. 28., ferner seie die Masse von B = m, seine Geschwindigkeit und Kraft der Bewegung aber ist nach der Bedingung = 0; folglich ist die Summe der Bewegungskräften sowohl vor als nach dem Stose = MC §. 124. Weil nun B sich nach dem Stose nicht langsamer als A bewegen kan, und auch nicht geschwinder, weil ihm A nicht mehrere Geschwindigkeit geben kan, als er selbst hat, so werden beide Körper nach dem Stose mit gleicher Geschwindigkeit fortgeführt, und die Summe ihrer Massen ist = M + m; weil ferner die Kraft der Bewegung aus dem Produkt der Masse in die Geschwindigkeit bestehet, §. 28., so ist $\frac{MC}{M+m} = c$ der Geschwindigkeit nach dem Stose, und folglich ist

auch $MC = Mc + mc$

und löset man diese Gleichung in folgende Proportion auf, so ist $c : C = M : M + m$.

Zusaz.

§. 128. Sind die Massen M und m beider Körper einander gleich, so ist die Geschwindigkeit nach dem Stoß $c = \frac{MC}{2M}$, und folglich wiederum.

$$c : C = M : 2M.$$

daraus erstehet man, daß die Geschwindigkeit der beiden Körper nach dem Stoß nur halb so gros als die von A vor dem Stoß wäre.

Lehrsaz.

§. 129. Wenn ein unelastischer Körper an einen andern sich langsamer aber in eben der Richtung bewe-

gen-

genden Körper gerade stosset, so ist ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stose gleich der Summe der Bewegungskräften dividirt durch die Summe ihrer Massen oder Gewichte.

Beweis: Wenn wir die vorhin gebrauchten Benennungen beibehalten, so ist die Summe der Bewegungskräften beider Körper sowohl vor als nach dem Stoß $= MC + mc$ §. 123. und folglich ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit $= \frac{MC + mc}{M + m}$ §. 28.

Lehrsatz.

§. 130. Wenn zween unelastische Körper von gleicher Masse mit verschiedener Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung gerade an einander stossen, so daß der geschwindere den langsamern nach dem Stose mit sich fortführet, so ist ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stose gleich dem halben Unterschied ihrer Geschwindigkeiten vor dem Stose.

Beweis: Wenn man die Masse eines ieden der beiden Körper A und B mit M, und ihre Geschwindigkeiten wie zuvor benennen, so ist die Kraft der Bewegung von A $= MC$, die von B $= Mc$, und also ihr Unterschied $= MC - Mc$; dieser aber ist gleich der Summe der Kraft der Bewegung nach dem Stose §. 125. also ist die Geschwindigkeit nach dem Stose $= \frac{MC - Mc}{2M}$, d. i. $\frac{C - c}{2}$; da aber der Unterschied der Geschwindigkeit vor dem Stose $= C - c$ ist, so ist klar daß $\frac{C - c}{2}$ nur die Hälfte davon sei.

Zu-

Zusaz.

§. 131. Wäre, anstaat daß die Massen gleich angenommen werden M : m = c : C, so ist MC = mc, und MC — mc = o, d. i. wenn die Massen ungleich, und die Geschwindigkeiten in verkehrter Verhältnis derselben stehen, so sind die Kräften der Bewegung beider Körper vor dem Stose gleich; und ihr Unterschied ist folglich = o; nun aber ist der Unterschied gleich der Summe der Bewegungskräften nach dem Stose, §. 125. und also iene ebenfals = o; also wenn die Massen ungleich sind, und die Geschwindigkeiten stehen in verkehrter Verhältnis der Massen, so höret die Bewegung nach dem Stose gänzlich auf.

Zusaz.

§. 132. Nimt man an, daß die Massen ungleich, und die Geschwindigkeiten vor dem Stose gleich sind, so ist die Kraft der Bewegung des ersten Körpers vor dem Stose = MC, die des andern = mC, und ihr Unterschied = MC — mC; weil nun dieser der Summe der Bewegung nach dem Stose gleich ist §. 125., so ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stose $= \frac{MC - mC}{M + m}$ §. 129.

und folglich $\frac{MC - mC}{M + m} : C = M - m : M + m$,

d. i. die Geschwindigkeit nach dem Stose verhält sich zur Geschwindigkeit vor dem Stose, wie der Unterschied der Massen zu ihrer Summe.

Zusaz.

§. 133. Sind die Massen sowohl als die Geschwindigkeiten auf was immer für Art ungleich, so ist die

Kraft

Kraft der Bewegung vor dem Stose des ersten $= MC$ und des andern $= mc$, und ihr Unterschied $= MC - mc$. Dieser aber ist gleich der Summe der Bewegungskraft nach dem Stose, §. 125. also ist die Geschwindigkeit nach dem Stose $= \frac{MC - mc}{M + m}$ d. i. gleich dem Unterschied der Kraft der Bewegung vor dem Stose dividirt durch die Summe der Massen.

Aufgabe.

§. 134. Wie die Bewegungskraft zu finden, die ein Körper bei dem anstossen an einen andern verloren hat?

Auflösung: 1. Multipliciret die Masse des Körpers durch *die gehabte* Geschwindigkeit vor dem Stose, um die Kraft der Bewegung vor dem Stose zu erhalten.

2. Multiplicirt auch die Masse desselben durch die ihn nach dem Stose übrig gebliebene Geschwindigkeit, so bekomt ihr die Kraft der Bewegung nach dem Stose.

3. Ziehet die leztere von der erstern ab, so zeiget der Unterschied was von der Bewegungskraft durch dem Stose verloren gegangen.

> Wie die nach dem Stose übrig bleibende Geschwindigkeiten zu finden, erhellet aus §. 127. und folgenden §§.

Grundsaz.

§. 135. Wenn ein unelastischer Körper an einen andern, der nicht weichen kan stosset, so höret seine ganze Bewegung auf.

Erklärung.

Fig. 32. §. 136. Wenn ein Körper A schief gegen eine Fläche DE in einen Punkt B stosset, und wieder davon gegen C abprellet, so wird der Winkel ABD, den die Richtungslinie AB mit DB machet, der **Einfalwinkel** (Angulus incidentiæ) genent; der Winkel CBE aber den die Richtungslinie BC beim abprellen mit BE machet, heisset der **Abprelwinkel** (Angulus reflexionis).

Lehrsatz.

§. 137. Wenn ein Körper A gegen einen andern DE, der nicht weichen kan, senkrecht, d. i. nach der Richtung AD anstosset, und einer oder alle beide sind elastisch, so wird A mit der nehmlichen Geschwindigkeit und Richtung von D wieder gegen A zuruck getrieben, mit welcher er angestossen hat.

Beweis: Wenn beide Körper nicht elastisch wären, so würde die ganze Kraft des Körpers A nach dem Stose vernichtet sein, und seine Bewegung gänzlich aufhören, §. 135. also wendet derselbe seine ganze Kraft an, den elastischen Körper zusammen zu drucken; so bald aber die Kraft des Körpers A in der Zusammendrückung sich erschöpfet hat, so suchet der elastische Körper sich mit eben der Kraft, als er zusammen gedrückt worden, wieder in seinen vorigen Zustand zu setzen §. 7. N. 5.; also muß der Körper A mit eben der Geschwindigkeit, mit welcher er angestossen hat, wieder zurückgetrieben werden, und weil sich der elastische Körper wieder nach eben der Richtung herstellet, als er gedruckt worden, so mus auch der Körper A nach eben der Richtung wieder zurückgetrieben werden, nach welcher er angestossen hat.

Zu=

Zusatz.

§. 138. Sind beide Körper elastisch, so werden sie bei ihrem Stose auch beide gegenseitig zusammen gedruckt, und suchen sich nach demselben mit der nehmlichen Kraft wieder herzustellen. Weil nun der Körper DE nicht weichen kan, so wird der Körper A mit der vorigen Geschwindigkeit und Richtung von D nach A wieder zurückgetrieben.

Lehrsatz.

§. 139. Wenn ein elastischer Körper A an einen andern DE, der nicht weichen kan, schief stosset, so springt er nach dem Stose dergestalt zurück, daß der Einfalwinkel dem Abprelwinkel gleich ist. Fig. 32.

Beweis: Wenn man die Kraft, mit welcher der Körper A gegen B anstosset, durch die Linie AB ausdrücket, so kan man sie auch als aus zwoen Kräften AH und AD zusammengesetzt ansehen §. 36.; Weil nun die Kraft AH zu DE parallel ist, so verlieret sie durch den Stose nichts, sondern ist nach demselben noch ganz vorhanden, und weil die Kraft AD senkrecht gegen DE würket, so erschöpfet sie sich durch den Stose gänzlich; weil aber der elastische Körper A durch den Stoß zusammengedruckt wird, und sich nach demselben wieder in seine vorige Figur herzustellen suchet, §. 7. Nr. 5. so mus er von DE mit der vorigen Kraft als er angestossen hat, zurück springen, und man kan die nach dem Stose vorhandene Kraft durch die zwo Kräfte BE = AH und BH = AD vorstellen. Weil aber der Körper keiner von beiden Richtungen BE und BH sondern der Diagonal BC folget, §. 32. so wird er nach dem Stose eigentlich in der Richtung BC abprel-

widerstehet A soviel, als B in ihn würket, §. 17., und diese Würkung wollen wir d nennen; da nun dieselbe der Richtung A gerade entgegen ist, so verliert A nach dem Stose an seiner Bewegungskraft, und dieselbe ist alsdann $= Q - d$, da ferner auch A in B eben soviel würket, §. 17., diese Würkung aber der Richtung der Bewegung von B nicht entgegen ist, sondern derselben vielmehr folget, so gewinnet B an der Bewegungskraft, und solche wird nach dem Stose $= q + d$ sein. Addiret man nun die Bewegungskräfte beider Körper nach dem Stose zusammen, so siehet man, daß $Q - d + q + d = Q + q$ seie.

Zusatz.

§. 124. Ist der Körper vor dem Stoß in Ruhe, so ist seine Kraft der Bewegung damals $= o$, und wenn des Körpers A seine $= Q$ ist, so ist ihre Summe von dem Stose $= Q + o$, ferner ist wegen der gegenseitigen Würkung der Körper die Kraft der Bewegung von A nach dem Stose $= Q - d$, und von $B = o + d$, und folglich ihre Summe $= Q - d + d$, d. i. die Summen der Kräften der Bewegung sind vor und nach dem Stose gleich, wenn ein nicht elastischer Körper an einen eben solchen ruhenden stosset.

Lehrsatz.

§. 125. Wenn zween Körper sich nach entgegengesetzter Richtung bewegen, und stossen, so ist der Unterschied ihrer Bewegungskräfte vor dem Stose gleich der Summe derselben nach dem Stose.

Beweis: Wenn man die vorige Benennungen beibehält, und annimt, daß $Q > q$ seie, so ist der Unterschied der Bewegungskräfte von A und B vor dem

Sto-

Stose $= Q - q$. Weil nun beide Körper entgegengesezte Bewegungen haben, so wird die grössere Bewegungskraft die kleinere gänzlich aufheben, und auch noch den Körper B nach der Richtung des ersten mit einer Kraft d mit fortführen; folglich wird wegen dem auch nach dem Stose noch anhaltenden Widerstand des Körpers B gegen A die Kraft der Bewegung des leztern nach dem Stose $= Q - q - d$ sein. Addirt man nun die in ieden Körper nach dem Stose noch vorhandenen Kräften zusammen, so siehet man, daß $Q - q - d + d = Q - q$ seie. Auf eine ähnliche Art läst sich das nehmliche erweisen, wenn man $Q < q$ annimt.

Zusaz.

§. 126. Haben zween nach entgegengesezter Richtung sich stossende Körper A und B gleiche Massen, und Geschwindigkeiten, so sind auch die Bewegungskräfte Q und q vor dem Stose einander gleich §. 28., folglich ist ihr Unterschied $= 0$; da nun gleich erwiesen worden, daß der Unterschied der Bewegungskräfte vor dem Stose gleich der Summe derselben nach dem Stose seie, so muß nothwendig nach dem Stose in gegenwärtigen Falle keine Bewegungskraft mehr vorhanden sein, sondern beide Körper müssen in die Ruhe kommen.

Lehrsaz.

§. 127. Wenn ein unelastischer Körper an einen andern ruhenden von eben der Art gerade anstosset, so verhält sich die Geschwindigkeit nach dem Stose zu der Geschwindigkeit vor dem Stose, wie die Masse oder das Gewicht des erstern zu der Summe der Massen oder der Gewichter von beiden.

Be-

Beweis: Es seie die Masse des Körpers A = M; seine Geschwindigkeit vor dem Stose = C; also ist dessen Kraft der Bewegung = MC §. 28., ferner seie die Masse von B = m, seine Geschwindigkeit und Kraft der Bewegung aber ist nach der Bedingung = o; folglich ist die Summe der Bewegungskräften sowohl vor als nach dem Stose = MC §. 124. Weil nun B sich nach dem Stose nicht langsamer als A bewegen kan, und auch nicht geschwinder, weil ihm A nicht mehrere Geschwindigkeit geben kan, als er selbst hat, so werden beide Körper nach dem Stose mit gleicher Geschwindigkeit fortgeführt, und die Summe ihrer Massen ist = M + m; weil ferner die Kraft der Bewegung aus dem Produkt der Masse in die Geschwindigkeit bestehet, §. 28., so ist $\frac{MC}{M+m} = c$ der Geschwindigkeit nach dem Stose, und folglich ist

auch $MC = Mc + mc$

und löset man diese Gleichung in folgende Proportion auf, so ist $c : C = M : M + m$.

Zusaz.

§. 128. Sind die Massen M und m beider Körper einander gleich, so ist die Geschwindigkeit nach dem Stoß $c = \frac{MC}{2M}$, und folglich wiederum.

$$c : C = M : 2M.$$

daraus ersiehet man, daß die Geschwindigkeit der beiden Körper nach dem Stoß nur halb so gros als die von A vor dem Stoß wäre.

Lehrsaz.

§. 129. Wenn ein unelastischer Körper an einen andern sich langsamer aber in eben der Richtung bewe-

gen.

genden Körper gerade stosset, so ist ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stose gleich der Summe der Bewegungskräften dividirt durch die Summe ihrer Massen oder Gewichte.

Beweis: Wenn wir die vorhin gebrauchten Benennungen beibehalten, so ist die Summe der Bewegungskräften beider Körper sowohl vor als nach dem Stoß $= MC + mc$ §. 123. und folglich ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit $= \frac{MC + mc}{M + m}$ §. 28.

Lehrsatz.

§. 130. Wenn zween unelastische Körper von gleicher Masse mit verschiedener Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung gerade an einander stossen, so daß der geschwindere den langsamern nach dem Stose mit sich fortführet, so ist ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stose gleich dem halben Unterschied ihrer Geschwindigkeiten vor dem Stose.

Beweis: Wenn man die Masse eines ieden der beiden Körper *A* und *B* mit *M*, und ihre Geschwindigkeiten wie zuvor benennen, so ist die Kraft der Bewegung von $A = MC$, die von $B = Mc$, und also ihr Unterschied $= MC - Mc$; dieser aber ist gleich der Summe der Kraft der Bewegung nach dem Stose §. 125. also ist die Geschwindigkeit nach dem Stose $= \frac{MC - Mc}{2M}$, d. i. $\frac{C - c}{2}$; da aber der Unterschied der Geschwindigkeit vor dem Stose $= C - c$ ist, so ist klar daß $\frac{C - c}{2}$ nur die Hälfte davon sei.

Zusatz.

§. 131. Wäre, anstaat daß die Massen gleich angenommen werden $M : m = c : C$, so ist $MC = mc$, und $MC - mc = 0$, d. i. wenn die Massen ungleich, und die Geschwindigkeiten in verkehrter Verhältnis derselben stehen, so sind die Kräften der Bewegung beider Körper vor dem Stose gleich; und ihr Unterschied ist folglich $= 0$; nun aber ist der Unterschied gleich der Summe der Bewegungskräften nach dem Stose, §. 125. und also iene ebenfals $= 0$; also wenn die Massen ungleich sind, und die Geschwindigkeiten stehen in verkehrter Verhältnis der Massen, so höret die Bewegung nach dem Stose gänzlich auf.

Zusatz.

§. 132. Nimt man an, daß die Massen ungleich, und die Geschwindigkeiten vor dem Stose gleich sind, so ist die Kraft der Bewegung des ersten Körpers vor dem Stose $= MC$, die des andern $= mC$, und ihr Unterschied $= MC - mC$; weil nun dieser der Summe der Bewegung nach dem Stose gleich ist §. 125., so ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stose $= \frac{MC - mC}{M + m}$ §. 129.

und folglich $\frac{MC = mC}{M + m} : C = M - m : M + m$,

d. i. die Geschwindigkeit nach dem Stose verhält sich zur Geschwindigkeit vor dem Stose, wie der Unterschied der Massen zu ihrer Summe.

Zusatz.

§. 133. Sind die Massen sowohl als die Geschwindigkeiten auf was immer für Art ungleich, so ist die

Kraft

Kraft der Bewegung vor dem Stose des ersten = MC und des andern = mc, und ihr Unterschied = MC — mc. Dieser aber ist gleich der Summe der Bewegungskraft nach dem Stose, §. 125. also ist die Geschwindigkeit nach dem Stose = $\frac{MC - mc}{M + m}$ d. i. gleich dem Unterschied der Kraft der Bewegung vor dem Stose dividirt durch die Summe der Massen.

Aufgabe.

§. 134. Wie die Bewegungskraft zu finden, die ein Körper bei dem anstossen an einen andern verloren hat?

Auflösung: 1. Multipliciret die Masse des Körpers durch die gehabte Geschwindigkeit vor dem Stose, um die Kraft der Bewegung vor dem Stose zu erhalten.

2. Multiplicirt auch die Masse desselben durch die ihn nach dem Stose übrig gebliebene Geschwindigkeit, so bekomt ihr die Kraft der Bewegung nach dem Stose.

3. Ziehet die leztere von der erstern ab, so zeiget der Unterschied was von der Bewegungskraft durch dem Stose verloren gegangen.

Wie die nach dem Stose übrig bleibende Geschwindigkeiten zu finden, erhellet aus §. 127. und folgenden §§.

Grundsaz.

§. 135. Wenn ein unelastischer Körper an einen andern, der nicht weichen kan stosset, so höret seine ganze Bewegung auf.

Erklärung.

Fig. 32. §. 136. Wenn ein Körper A schief gegen eine Fläche DE in einen Punkt B stosset, und wieder davon gegen C abprellet, so wird der Winkel ABD, den die Richtungslinie AB mit DB machet, der **Einfalwinkel** (Angulus incidentiæ) genent; der Winkel CBE aber den die Richtungslinie BC beim abprellen mit BE machet, heisset der **Abprelwinkel** (Angulus reflexionis).

Lehrsaz.

§. 137. Wenn ein Körper A gegen einen andern DE, der nicht weichen kan, senkrecht, d. i. nach der Richtung AD anstosset, und einer oder alle beide sind elastisch, so wird A mit der nehmlichen Geschwindigkeit und Richtung von D wieder gegen A zuruck getrieben, mit welcher er angestossen hat.

Beweis: Wenn beide Körper nicht elastisch wären, so würde die ganze Kraft des Körpers A nach dem Stose vernichtet sein, und seine Bewegung gänzlich aufhören, §. 135. also wendet derselbe seine ganze Kraft an, den elastischen Körper zusammen zu drucken; so bald aber die Kraft des Körpers A in der Zusammendrückung sich erschöpfet hat, so suchet der elastische Körper sich mit eben der Kraft, als er zusammen gedrückt worden, wieder in seinen vorigen Zustand zu sezen §. 7. N. 5.; also muß der Körper A mit eben der Geschwindigkeit, mit welcher er angestossen hat, wieder zurückgetrieben werden, und weil sich der elastische Körper wieder nach eben der Richtung herstellet, als er gedruckt worden, so mus auch der Körper A nach eben der Richtung wieder zurückgetrieben werden, nach welcher er angestossen hat.

Zu-

Zusaz.

§. 138. Sind beide Körper elastisch, so werden sie bei ihrem Stose auch beide gegenseitig zusammen gedruckt, und suchen sich nach demselben mit der nehmlichen Kraft wieder herzustellen. Weil nun der Körper DE nicht weichen kan, so wird der Körper A mit der vorigen Geschwindigkeit und Richtung von D nach A wieder zurückgetrieben.

Lehrsaz.

§. 139. Wenn ein elastischer Körper A an einen andern DE, der nicht weichen kan, schief stosset, so springt er nach dem Stose dergestalt zurück, daß der Einfalwinkel dem Abprelwinkel gleich ist. Fig. 32.

Beweis: Wenn man die Kraft, mit welcher der Körper A gegen B anstosset, durch die Linie AB ausdrücket, so kan man sie auch als aus zwoen Kräften AH und AD zusammengesezt ansehen §. 36.; Weil nun die Kraft AH zu DE parallel ist, so verlieret sie durch den Stose nichts, sondern ist nach demselben noch ganz vorhanden, und weil die Kraft AD senkrecht gegen DE würket, so erschöpfet sie sich durch den Stose gänzlich; weil aber der elastische Körper A durch den Stoß zusammengedruckt wird, und sich nach demselben wieder in seine vorige Figur herzustellen suchet, §. 7. Nr. 5. so mus er von DE mit der vorigen Kraft als er angestossen hat, zurück springen, und man kan die nach dem Stose vorhandene Kraft durch die zwo Kräfte BE = AH und BH = AD vorstellen. Weil aber der Körper keiner von beiden Richtungen BE und BH sondern der Diagonal BC folget, §. 32. so wird er nach dem Stose eigentlich in der Richtung BC abprel-

len. Da nun ADBH und BHCE gleich und ähnliche Parallelogrammen sind, und iedes durch seine Diagonale in zwei solche Dreiecke zerteilet wird, so sind auch ihre gleichnahmigte Winkel gleich, und folglich ist ABD = CBE, d. i. der Einfalwinkel ist gleich dem Abprelwinkel.

Aufgabe.

§. 140. Wie der Punkt B zu finden, in welchen ein schief anstossender elastischer Körper A im zurückprellen durch den ausser dem Körper DE gegebenen Punkt I gehen mus.

Auflösung: 1. Messet die perpendikular Abstände AD und IF, und auch ihre Entfernung von einander DF.

2. Teilet DF dergestalt in zween Teile, daß BF : BD = IF : AD sei, so ist B der verlangte Punkt.

Beweis: Weil die Seiten der Dreiecke BIF und BAD in Proportion stehen, so sind sie einander ähnlich. §. 139. und ihre gleichnahmigte Winkel sind einander gleich, derowegen ist der Winkel ABD = IBF, das aber ist der Einfalwinkel und Abprelwinkel, also wenn der Körper A schief in B stosset, so wird er im zurückprellen durch I gehen.

Zusaz.

§. 141. Verlangte man den Einfalwinkel ABD zu finden, so sehet DB als den Sinus totus AD aber als den Sinus des Winkels ABD an, und löset das Dreieck ABD nach §. 432. Geomet. auf.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 142. Die Kraft eines senkrechten Stoses gegen einen Körper verhält sich zu der eines schiefen wie der Sinus totus zum Sinus des Einfalwinkel des leztern.

Beweis: Wenn man die Kraft des Stoses überhaupt durch AB, und die des schiefen, welcher nach der Richtung AB geschihet, aus zwoen Kräften AH und AD zusammengesezt ausdruckt, so würket die Kraft AD bei dem schiefen Stoß nur allein in den Körper DE, weil die andere parallel zu DE ist. Siehet man nun in dem Dreiecke ABD die Seite AB als den Sinus totus, AD aber als den Sinus des Einfalswinkel ABD an, so ist klar, daß sich die Kraft des senkrechten Stoses zu der Kraft eines schiefen wie der Sinus totus zum Sinus des Einfalwinkels verhalte.

Lehrsatz.

§. 143. Wenn ein elastischer Körper A an einen andern ihm gleichen aber ruhenden B gerade stosset, so wird A nach dem Stose ruhen, B aber mit der Geschwindigkeit A bewegt werden.

Beweis: Wenn beide Körper nicht elastisch wären, so würden sie sich nach dem Stose in voriger Richtung mit der halben Geschwindigkeit des Körpers A bewegen §. 128., nun aber würket die Schnelkraft von B nach dem Stose gegen A mit einer Geschwindigkeit die der Zusammendrückung gleich ist, und hinwieder A gegen B auf die nehmliche Art. Weil aber die Würkung der Schnelkraft von B der Richtung der Bewegung von A gerade entgegen ist, so mus die Bewegung von A nach dem Stose ganz aufhören, und weil die Würkung der Schnelkraft von A der Richtung von B nicht entgegen ist, sondern nach der Richtung von A ge-

geschihet, so mus sich B nach dem Stose mit der Geschwindigkeit von A und in desselben Richtung bewegen.

Zusatz.

Fig. 33. §. 144. Wenn also mehreren gleichen und sich berührenden elastischen Körpern BCDE durch einen andern A ein Stoß beigebracht wird, so werden sie alle bis auf den letzten in Ruhe bleiben, dieser aber wird sich allein mit der Geschwindigkeit von A gegen F bewegen; weil erstlich A seine ganze Kraft an B, dieser an C, u. s. w. giebt, die Schnelkraft dieser Körper aber in die sie stossenden zurückwürket, und sie in Ruhe bringt. §. 143. Da aber in den letzten weiter nichts zurückwürket, so setzet er seine Bewegung mit der erhaltenen Geschwindigkeit fort.

Lehrsatz.

§. 145. Wenn zween elastische Körper von gleicher Masse und Geschwindigkeit sich in gerader entgegengesetzter Richtung stossen, so werden sie beide nach dem Stose mit ihrer vorigen Geschwindigkeit und Richtung zurückspringen.

Beweis: Wären beide Körper nicht elastisch, so würden sie nach dem Stose ihre ganze Bewegung verlieren, und in Ruhe kommen §. 126. weil aber beide elastisch sind, so werden ihre Kräften in die gegenseitige Zusammendrückung verwendet. Nun aber ist bei elastischen Körpern die Herstellung so stark als die Zusammendrückung §. 7. Nr. 5. also wird ein Körper den andern nach dem Stose mit eben der Geschwindigkeit und Richtung zurücktreiben, als er gekommen ist.

Lehrsatz.

§. 146. Wenn zween elastische Körper von gleicher Masse und mit ungleicher Geschwindigkeit sich in entgegengesetzter Richtung stossen, so werden sie nach dem Stose mit verwechselten Geschwindigkeiten zurückgetrieben.

Beweis: Wenn die zween Körper A und B gleiche Geschwindigkeiten hätten, so würden sie sich auch nach dem Stose wieder gleiche Geschwindigkeiten mitteilen, und sich von einander entfernen §. 145. da wir aber annehmen, daß die Geschwindigkeit von A = C + d, und die von B = C sei, und die Schnelkraft durch ihre Zurückwürkung dem einen Körper des andern Geschwindigkeit gegenseitig mitteilet, so wird nach dem Stose die Geschwindigkeit von A = C, und die von B = C + d sein, und weil die Schnelkraft beider Körper den vorigen Richtungen gerade entgegen würket, so müssen sie sich nach eben denselben wieder von einander entfernen.

Zusaz.

§. 147. Die Summe der Geschwindigkeiten der beiden Körper vor dem Stose ist also nach dem Stose noch die nehmliche, und nur verwechselt, d. i. C + d = C + d.

Lehrsatz.

§. 148. Wenn ein elastischer Körper A an einen andern B der sich nach eben der Richtung aber langsammer bewegt, und von gleicher Masse ist, anstosset, so werden sie beide nach dem Stose ihre Geschwindigkeiten verwechseln aber sich in der vorigen Richtung weiter fort bewegen.

Beweis: Wenn wir die vorige Benennungen beibehalten, und erstlich nur die gleiche Geschwindigkeiten C und C betrachten, so sehen wir, daß mit denselben kein Stoß erfolgen, und also auch die Körper sich dieselbe nicht mitteilen könten; weil aber die Geschwindigkeit von A = C + d ist, so ist es beim Anstossen an B eben soviel, als ob A nur mit der Geschwindigkeit d allein an B stossete, und als ob B in Ruhe wäre, daher teilet ihm derselbe auch nur eine Geschwindigkeit d mit, behält aber die Geschwindigkeit C selbst, und B bekomt also nach dem Stose die Geschwindigkeit C + d, und beide bewegen sich nach der vorigen Richtung.

Zusaz.

§. 149. Da also die Geschwindigkeiten vor dem Stose nur um ihren Unterschied nach dem Stose verwechselt worden, so werden sich die zween Körper nach dem Stose mit eben der Geschwindigkeit von einander zu entfernen suchen, mit welcher sie sich vor dem Stose genähert haben.

Lehrsaz.

§. 150. Wenn ein unelastischer Körper A an einen sich nach eben der Richtung aber langsamer bewegenden B stosset, so ist die Kraft der Bewegung nach dem Stose eben so gros, als sie gewesen wäre, wenn A mit dem Unterschied der Geschwindigkeit der beiden Körper vor dem Stose an B ruhend gestossen hätte.

Beweis: Um dieses zu erweisen, ist nur darzu thun, daß in beiden Fällen nach dem Stose eine gleiche Kraft der Bewegung verloren gehe. Wenn man also nach dem ersten Falle annimt, daß B in Bewegung sei, und die Masse von A = M, seine Geschwindigkeit = C; die Masse von B = m, und c dessen Geschwindigkeit

sei, so wird die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stose $= \frac{MC + mc}{M + m}$ §. 129. und also die Kraft der Bewegung von beiden sich nach dem Stose mit einander bewegenden Körpern $= \frac{M^2C + Mmc}{M + m}$ sein, weil nun die Kraft der Bewegung von A vor dem Stose $= MC$ wäre, so ist klar, daß die Kraft der Bewegung, so A durch dem Stoß verlieret, $= MC - \frac{M^2C + Mmc}{M + m} = \frac{M^2C + MmC - M^2C - Mmc}{M + m}$ $= \frac{MmC - Mmc}{M + m}$.

Wird nun in andern Falle angenommen, daß B in Ruhe sei, und durch A mit einer Geschwindigkeit $C - c$ gestossen werde, so ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stose $= \frac{MC - Mc}{M + m}$ §. 129. und folglich die Kraft der Bewegung von A nach dem Stose $= \frac{M^2C - M^2c}{M + m}$; weil nun seine Kraft der Bewegung vor dem Stose $= MC - Mc$ wäre, so mus die nach dem Stose verloren gegangene Kraft der Bewegung $= \frac{M^2C - M^2c + MmC - Mmc - M^2C + M^2c}{M + m}$ $= \frac{MmC - Mmc}{M + m}$ sein.

Diese Grösse aber ist der im ersten Falle verloren gegangenen Kraft der Bewegung gleich, also ist auch der Stoß in beiden Fällen gleich.

Zusaz.

§. 151. Wenn also beide Körper elastisch sind, so ist die Zuruckwürkung gegeneinander ihrem Stose gleich §. 7. Nr. 5. also wenn sich A geschwinder aber in der nehmlichen Richtung wie B bewegt, so ist die Würkung der Schnelkraft bei dem Stose beider Körper so gros, als der Unterschied dee Geschwindigkeiten vor dem Stoß wäre.

Lehrsaz.

§. 152. Wenn zween unelastische Körper in entgegengesezter Richtung gerade an einander stossen, so ist ihr Stoß eben so gros, als wenn A mit einer Geschwindigkeit, die der Summe der Geschwindigkeiten der beiden Körper vor dem Stose gleich ist, an B ruhend anstossete.

Beweis: Um dieses zu erweisen, muß abermal dargethan werden, daß in beiden Fällen gleiche Kräfte der Bewegung verloren gehen. Wenn wir also die vorige Benennung beibehalten, so ist im ersten Falle die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stose $= \frac{MC - mc}{M + m}$ §. 129. und also die Kraft der Bewegung von A nach dem Stose $= \frac{M^2C - Mmc}{M + m}$; nun aber ist die Kraft der Bewegung von A vor dem Stose = MC, folglich ist die im ersten Falle bei dem Stose verloren gegangene $= \frac{M^2C + MmC - M^2C + Mmc}{M + m}$ $= \frac{MmC + Mmc}{M + m}$.

Nimt man nun in andern Falle an, daß B in Ruhe, und die Geschwindigkeit von A vor dem Stose = C + c sei, so wird die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stose = $\frac{MC + Mc}{M + m}$ sein, §. 129. folglich ist die Bewegungskraft von A nach dem Stoß

$$= \frac{M^2C + M^2c}{M + m}.$$

Nun aber ist die Kraft der Bewegung von A vor dem Stose = MC + Mc, also wird die durch dem Stose im zweiten Falle verloren gegangene Kraft der Bewegung = $\frac{M^2C + MmC + M^2c + Mmc - M^2C - M^2c}{M + m}$

= $\frac{MmC + Mmc}{M + m}$ sein; diese Grösse aber ist der im ersten Falle für die verloren gegangene Kraft der Bewegung gefundenen gleich, also ist auch der Stoß in beiden Fällen gleich.

Zusatz.

§. 153. Sind beide Körper elastisch, so ist die Zurückwürkung der Schnelkraft dem Stose selbst gleich §. 7. Nr. 5. wenn sich also beide Körper in entgegengesetzter Richtung stossen, so würket ihre Schnelkraft mit einer Geschwindigkeit, die der Summe ihrer vor dem Stose gehabten Geschwindigkeiten gleich ist.

Aufgabe.

§. 154. Wenn zween volkommen elastische Körper sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten nach einerlei Richtung bewegen, und stossen, deren Massen und Geschwindigkeiten vor dem Stose bekant sind, wie eines ieden Geschwindigkeit nach dem Stose zu finden?

Auf-

Auflösung: Wenn wir die vorigen Benennungen beibehalten, und anfänglich annehmen, daß beide Körper nicht elastisch wären, so würden sie sich nach dem Stose miteinander fort bewegen, und ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit würde alsdenn $= \frac{MC + mc}{M + m}$ sein §. 129. Weil sie aber elastisch sind, so würket die Schnelkraft in dieselbe mit einer Geschwindigkeit wie $C - c$ §. 146., und sie zerteilet solche in dem Augenblick des Stoses, wo beide Körper gleichsam nur einen ausmachen, dergestalt, daß die von der Schnelkraft herrührenden Geschwindigkeiten mit den Massen in verkehrter Verhältnis stehen, d. i. Wenn man die Geschwindigkeit, die B bekomt, $= x$ setzet,

so ist $M : m = x : C - c - x$

folglich $MC - Mc - Mx = mx$

und $MC - Mc = Mx + mx$

also $\frac{MC - Mc}{M + m} = x$

daher ist die Geschwindigkeit, welche A bekomt

$$= C - c - \frac{MC + Mc}{M + m}$$

$$= \frac{MC - Mc + mC - mc - MC + Mc}{M + m}$$

$$= \frac{mC - mc}{M + m}.$$

Weil aber die Schnelkraft gegen die Richtung von A würket, und diesen Körper zurückzutreiben suchet, so mus die durch die Schnelkraft überkommene Geschwindigkeit x von der durch den puren Stoß entstandenen abgezogen werden, um endlich die eigentliche Geschwindigkeit von A nach dem Stose

$= MC$

$$= \frac{MC + mc - mC + mc}{M + m} = \frac{MC - mC + 2mc}{M + m}$$

zu erhalten. Weil ferner die Schnelkraft der Richtung von B nicht entgegen, sondern nach derselben würket, so mus die von der Schnelkraft herrührende Geschwindigkeit x zu der durch den Stoß allein entstandenen addiret werden, um die Geschwindigkeit von B nach dem Stose $= \frac{MC + mc + MC - Mc}{M + m}$

$= \frac{2MC + mc - Mc}{M + m}$ zu erhalten.

Zusatz.

§. 155. Weil die Geschwindigkeit von A eigentlich negativ wird, so ist es ein Zeichen, daß die durch die Schnelkraft nach dem Stose zurück empfangene Geschwindigkeit grösser als die vom Stoß selbst sei, daher mus A nach dem Stose nothwendig seine Richtung ändern, und wieder den Weg zurück nehmen, den er gekommen ist. Wäre aber die Geschwindigkeit x der Schnelkraft kleiner als die Geschwindigkeit welche A durch den Stoß allein besitzet, so würde sich dieser Körper nach dem Stose nur mit dem Unterschied dieser beiden Geschwindigkeiten nach seiner vorigen Richtung fort bewegen, übrigens verstehet sich von selbst, daß wenn beide Geschwindigkeiten gleich sind, er nach dem Stose ganz in die Ruhe kommen müsse.

Aufgabe.

§. 156. Wenn zween elastische Körper sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten nach entgegengesetzter Richtung bewegen, und stossen, und ihre Massen und Geschwindigkeiten vor dem Stose sind gegeben; wie eines jeden Geschwindigkeit nach dem Stose zu finden?

Auf-

Auflösung: Wenn wir die vorigen Benennungen beibehalten, und abermal annehmen, als ob beide Körper nicht elastisch wären, so wird ihre durch den Stoß allein erhaltene Geschwindigkeit $= \frac{MC - mc}{M + m}$ sein §. 133. da sie aber beide elastisch sind, und die Schnelkraft in dieselbe mit einer Geschwindigkeit wie $C + c$ würket, §. 153. und solche in dem Augenblick des Stoßes dergestalt zerteilet, daß die von der Schnelkraft mitgeteilten Geschwindigkeiten mit den Massen in verkehrter Verhältnis stehen. D. i. wenn wir die Geschwindigkeit, welche der Körper B bekomt, wieder $= x$ annehmen, daß:

$$M : m = x : C + c - x$$

folglich $MC + Mc - Mx = mx$

und $MC + Mc = Mx + mx$

also $\frac{MC + Mc}{M + m} = x$ sei.

Daher ist die Geschwindigkeit, welche A bekomt

$$= C + c - \frac{MC - Mc}{M + m}$$

$$= \frac{MC + Mc + mC + mc - MC - Mc}{M + m}$$

$$= \frac{mC + mc}{M + m}.$$

Daher entstehet demnach wie zuvor die eigentliche Geschwindigkeit von A nach dem Stose

$$= \frac{MC - mc - mC - mc}{M + m} = \frac{MC - mC - 2mc}{M + m}$$

und die Geschwindigkeit von $B = \frac{MC - mc + MC + Mc}{M + m}$

$$= \frac{2MC + Mc - mc}{M + m}.$$

Wenn

Wenn $mC + 2mc$ grösser als MC ausfallet, so ist es ein Zeichen, daß die durch die Schnellkraft empfangene Geschwindigkeit grösser als die eigene von A sei, und der Körper A wird in solchen Falle wieder zuruck gehen; ist $mC + 2mc = MC$, so wird A nach dem Stose ruhen, wenn aber $mC + 2mc$ kleiner als MC wäre, so würde sich A nach dem Stose in voriger Richtung noch weiter fort bewegen.

Lehrsatz.

§. 157. Wenn ein elastischer Körper A gerade an einen andern ruhenden B anstosset, und beide sind von verschiedener Masse, so verhält sich 1. die Geschwindigkeit von A nach dem Stose zur gehabten Geschwindigkeit vor dem Stose, wie der Unterschied der Massen von A und B zu ihrer Summe, und 2. die nach dem Stose dem Körper B mitgeteilte Geschwindigkeit ist zur Geschwindigkeit, welche A vor dem Stose hatte, wie die dopelte Masse von A zur Summe der Massen beider Körper.

Beweis: Wenn M die Masse von A, m die Masse von B, V die Geschwindigkeit von A vor dem Stose, C die Geschwindigkeit desselben nach dem Stose, v die Geschwindigkeit von B vor dem Stose, welche hier $= 0$ ist, und c seine Geschwindigkeit nach dem Stose ist, so betrachtet, 1. daß, wenn B eine Bewegung hätte, die Geschwindigkeit von A nach dem Stose $= \frac{MV - mV + 2mv}{M + m}$ wäre, §. 154. weil aber B ruhet, so ist ihre Geschwindigkeit vor dem Stose $= 0$ und eben daher auch $2mv = 0$, folglich ist die Geschwindigkeit nach dem Stose $= C = \frac{MV - mV}{M + m}$, und folglich ist $C : V = M - m : M + m$.

2.

2. Wenn man annimt, daß B nicht ruhe, so ist seine Geschwindigkeit nach dem Stose $= c = \frac{2MV + mv - Mv}{M + m}$ §. 154. weil aber B in Ruhe und also $v = o$ ist, so ist $\frac{2MV}{M + m} = c$ der Geschwindigkeit von B nach dem Stose und also

$$c : V = 2M : M + m.$$

Übrigens. Da die Schnelkraft, Härte, und Weiche der Körper als die Eigenschaften, welche bei dem Stose den meisten Einfluß haben, niemalen in volkommsten Grade sondern immer vermischt angetroffen werden, die meisten von dem Stose der Körper angeführten Gründe aber solche in der grösten Volkommenheit voraussetzen, so erinnere ich die Anfänger sich nicht zu verwundern, wenn sie bei angestelten Versuchen, oder in der Ausübung die oben gegebenen Regeln oft nicht gänzlich mit der erfolgten Würkung übereinstimmen sehen. Es gehet hier so wie mit den meisten physikalischen Unternehmungen, wo die mathematische Gewisheit wegen der zu grossen Verschiedenheit, die in der Natur angetroffen wird, nicht mehr staat finden kan. Ich solte zwar hier von dem Stose der Stuckkugeln und Bomben gegen die Obiekten wieder welche sie geschossen und geworfen werden ein und anderes anführen; allein die grosse Verschiedenheit der Körper, die Schwierigkeit ihre Eigenschaften, so den Stose ändern können, auf die Probe zu nehmen, oder die Grade ihre Härte, Weiche oder Elasticität zu entdecken, kurz die fast unüberwindlichen Hindernisse etwas verläsliches herauszubringen halten mich ab den Anfängern Sachen vorzulegen, die in der Ausübung so gar wenig anwendbar sind.

Sech=

Sechstes Hauptstück.

Von dem Schwerpunkt.

Erklärung.

§. 158. Der Mittelpunkt der Schwere eines Körpers (Centrum Gravitatis) ist ein gewisser Punkt, um welchen die Masse eines Körpers dergestalt ausgeteilet ist, daß, wenn man denselben mit einer geraden Fläche durch diesen Punkt nach was immer für einer Richtung durchschneidet, beide Teile allemal gleiche Schwere bekommen. Oder wenn der Körper senkrecht unter diesem Punkt unterstützet, oder oben an demselben aufgehangen wird, so neiget er sich weder mehr auf die eine als andere Seiten, sondern bleibt in der Ruhe.

Zusatz.

§. 159. Obwohl eine mathematische Linie oder Fläche nichts körperliches an sich, und folglich keine Schwere hat, so kan man sie doch im Gedanken als Körper ansehen, und ihnen eine Schwere zueignen, wenn man sich an ihnen wie an den Körpern drei Dimensionen einbildet, wovon aber an der Linie zwo nehmlich die Dicke und Breite, und an der Fläche eine nehmlich die Dicke als unendlich klein betrachtet werden müssen. In diesem Verstande läst sich auch an Linien und Flächen ein Punkt denken, der die Eigenschaften des Schwerpunkts der würklichen Körper hat, und der daher auch der Schwerpunkt einer Linie oder Fläche genent wird.

Willkührlicher Satz.

§. 160. Man pflegt überhaupt anzunehmen, als ob die ganze Schwere eines Körpers in dessen Mittelpunkt der Schwere allein versammelt wäre, und alle übrige Teile keine Schwere hätten.

Erklärung.

§. 161. Der Durchmesser der Schwere eines Körpers (Diameter Gravitatis) ist eine gerade Linie, welche nach was immer für einer Richtung durch den Mittelpunkt der Schwere desselben gezogen ist.

Zusatz.

§. 162. Wenn also zween oder mehrere solche Durchmesser in einem Körper gezogen werden, so durchschneiden sie sich alle in dessen Schwerpunkte.

Erklärung.

§. 163. Wenn eine gerade Fläche einen Körper durch den Schwerpunkt, oder nach einen Durchmesser der Schwere durchschneidet, so heisset sie eine Fläche der Schwere (Planum Gravitatis).

Zusatz.

§. 164. Zwo solche Flächen durchschneiden sich also in einem Durchmesser der Schwere.

Erklärung.

§. 165. Körper, welche in allen ihren Teilen und unter gleichen Ausdehnungen gleiche eigenthümliche Schwere (Gravitas specifica) haben, werden Körper von gleichartiger Schwere genent, so wie diejenige von ungleichartiger Schwere sind, welche unter

glei-

gleichen Ausdehnungen ungleiche eigenthümliche Schwere enthalten.

Z. B. Ein Prisma, ganz gleichdicht von Eisen ist ein Körper von gleichartiger Schwere, und an einen, welches halb von Holz und halb von Eisen zusammengesetzt wäre, ist die eigenthümliche Schwere ungleichartig; weil ein Körper von Holz, und einer von Eisen unter gleichen Ausdehnungen nicht gleiche Schwere haben.

Erklärung.

§. 166. **Das Bemühen der Schwere** (Gravitatio, Pondus, vel Momentum Gravitatis) ist iene Kraft, mit welcher sich die schwere Körper zu bewegen anfangen, und in alle ihnen entgegenstehende würken; sie ist also gleich dem Produkt aus der anfänglichen Geschwindigkeit in die Masse des Körpers.

Zusaz.

§. 167. Da die anfängliche Geschwindigkeit der Schwere in allen Körpern gleich ist, §. 6., so stehet ihr Bemühen oder die Gravitation mit den Massen, wenn sie von gleichartiger Schwere sind, in gerader Verhältnis, und folglich kan man die Masse der Körper, wenn sie von gleichartiger Schwere, für ihr Gewicht, und dieses für iene nehmen.

Zusaz.

§. 168. Wie die Figur eines Körpers immer verändert wird, wenn er nur die nehmliche Art und Menge der Masse behält, so behält er auch sein voriges Bemühen der Schwere, oder sein Gewicht bei.

Erklärung.

§. 169. Der Mittelpunkt der Grösse, oder der Figur (Centrum Magnitudinis vel figuræ) hat in einem Körper, einer Fläche oder Linie eine solche Stellung oder Lage, daß, wenn man dieselbe mit einer geraden Fläche durch ihn nach was immer für einer Richtung durchschneidet, beide Teile allemal gleichen Inhalt bekommen.

Zusatz.

§. 170. Der Mittelpunkt der Grösse oder Figur ist also an einer geraden Linie in ihrer Mitte; der eines Quadrats oder Recktangels in dem Durchschnitte ihrer Diagonalen; der eines regelmässigen Polygons oder einer Zirkelfläche oder einer Kugel dessen Mittelpunkt selbst; der eines Kubus, Prisma oder Cylinders in der Mitte ihrer Achse.

Erklärung.

Fig. 34. §. 171. Wenn man sich einbildet, daß die Schwerpunkten zweener Körper A und B durch eine unbiegsame gerade Linie AB, die ohne Schwere ist, verbunden sind, und dieselbe in einem Punkte C dergestalt entweder unterstützet, oder aufgehangen wird, daß sie sich um denselben frei bewegen kan, so wird diese Linie ein mathematischer Hebel (Vectis mathematica) der Punkt C der Ruhepunkt (Hypomochlium) oder auch der gemeinschaftliche Schwerpunkt von beiden Körpern genent.

Hat die Linie, welche die zween Körper verbindet, eine Schwere, d. i. ist sie würklich ein Körper z. B. eine Eisenstange, die nur eine Linie vorstellet, so wird sie ein physikalischer Hebel genent.

Er-

Erklärung.

§. 172. Man pflegt zu sagen, daß zween Körper A und B im Gleichgewicht stehen, wenn ihre Schwerpunkten durch eine gerade Linie, die in einem Punkt C aufgehangen oder unterstüzet ist, verbunden werden, und alsdenn keine Bewegung erfolget, oder beide Körper ein gleiches Bemühen der Schwere ausüben.

Zusaz.

§. 173. Weil die Würkung der Schwere allezeit senkrecht gegen den Mittelpunkt der Erde gehet, so ist es eben nicht allezeit nöthig, daß der Hebel, welcher die zween Körper verbindet, eine gerade Linie sei, oder daß er durch die Schwerpunkten derselben gehe. Er kan auch auf was immer für Art wie z. B. CF gekrümt sein, oder die Körper können an Fäden darangehangen werden, genug wenn DF und GE zu AB parallel, und DF = CB, und GE = AC angenommen werden.

Lehrsaz.

§. 174. Wenn zween Körper von gleicher Masse oder Schwere an einen Hebel gleich weit von seinen Ruhepunkt aufgehangen werden, so stehen sie im Gleichgewicht.

Beweis: Betrachtet, daß, wenn der in A befindliche Körper den in B bewegen sol, sie beide in der nehmlichen Zeit die gleiche Bögen AD und BE beschreiben müßen; weil die Radien CA und CB gleich angenommen worden, folglich hätten die Körper gleiche Geschwindigkeit; da sie nun auch von gleicher Masse sind, so haben sie ein gleiches Bemühen der Schwere, §. 166., und also kan keiner den andern in Bewegung setzen, sondern sie sind im Gleichgewicht, §. 172. Fig. 35.

Lehrsaz.

§. 175. In einigen Körpern und Flächen, die von gleichartiger Materie sind, ist der Mittelpunkt der Grösse einerlei mit dem Mittelpunkt der Schwere.

Beweis: Der Mittelpunkt der Grösse hat in einigen Körpern und Flächen eine solche Lage, daß, wie man immer durch denselben einen geraden Durchschnit machet, dieselbe allemale in zween Teile geteilet werden, die einander an Inhalt gleichen, §. 169. ferner, was man sich immer in denselben für gleichweit von dem Mittelpunkt der Grösse abstehende und mit einer geraden durch denselben gehenden Linie zusammengezogene Punkten, den man eine Schwere zueignet, einbildet, so stehen solche im Gleichgewicht §. 174. diese Punkten aber alle zusammengenommenen machen den Inhalt des Körpers oder die Fläche selbst, und ihre Schwere zusammen die ganze Schwere aus, und der Mittelpunkt der Grösse ist zugleich der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller in beiden Teilen angenommenen Punkten, also ist der Mittelpunkt der Grösse, und Schwere in einigen Körpern und Flächen von gleichartiger Materie einerlei.

Zusaz.

§. 176. Wenn man sich also einbildet, daß eine gerade Linie in zween gleiche Teile geteilet sei, und daß alle Punkten derselben eine Schwere hätten, so ist aus obigen Lehrsaz klar, daß der Mittelpunkt der Grösse und Schwere an einer geraden Linie einerlei sei.

Die Mittelpunkte der Grösse und Schwere sind hauptsächlich in nachstehenden Flächen und Körpern einerlei, als: In der Zirkelfläche, in allen

regel-

regelmässigen Polygonen, in dem Quadrat, Rectangel, Rhombus und Rhomboides. Dann in der Kugel, in Körpern so durch regelmässige und einerlei Vielecke eingeschlossen sind, in Cylindern und Prismen; sind aber diese Flächen aus ungleichartigen Materien zusammengesetzt, so sind auch diese Mittelpunkte in ihnen verschieden; wie aber in den erstern die Mittelpunkte zu finden, ist aus der Geometrie bekant.

Aufgabe.

§. 177. Wie der Mittelpunkt der Schwere in einen Dreiecke zu finden?

Auflösung: Teilet zwo beliebige Seiten AE und EB iede in zween gleiche Teile, und ziehet die Linien AF und BD, so ist ihr Durchschnitspunkt C der Schwerpunkt des Dreiecks ABE.

Beweis: Betrachtet, daß man das Dreieck aus Elementen wie FI, die parallel zu AE sind, bestehend ansehen könne, und daß also dieselbe insgesamt durch die Linie DB in zween gleiche Teile geteilet werden; folglich gehet DB durch den Schwerpunkt des Dreieks; nicht minder aber werden die parallele Elemente zu BE durch AF in zween gleiche Teile geteilet, folglich gehet auch AF durch den Schwerpunkt, und AF und BD sind Durchmesser der Schwere §. 161. die sich in den Schwerpunkte C durchschneiden §. 162.

Zusaz.

§. 178. Da FG parallel zu AE ist, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecken EDB und FGB die Linie $FG = \frac{ED}{2}$, und folglich auch $= \frac{AD}{2}$; nicht min-

der wegen der Aehnlichkeit der Dreiecken ADC und FGC ist

$$AD : FG = AC : CF$$

nun aber ist $AD = 2FG$,
also ist auch $AC = 2CF$

das ist $AC = 2\frac{AF}{3}$

d. i. Man findet den Schwerpunkt eines Dreiecks, wenn man aus einen Winkel A auf die Mitte der entgegenstehenden Seiten EB eine Linie AF ziehet, und auf derselben einen Punkt C annimt, der $\frac{2}{3}$ AF von A entfernt ist.

Lehrsatz.

§. 179. Wenn zween Körper von gleicher Schwere an einen Hebel in ungleicher Weite von dem Ruhepunkt angebracht werden, und der Hebel selbst ohne Schwere betrachtet wird, so sind die Bemühungen ihrer Schwere ungleich, und dieselbe verhalten sich wie ihre Abstände von dem Ruhepunkt.

Fig. 37. **Beweis**: Es sei der Abstand AO des in A an der Hebel gehangenen Körpers = 2, die Bemühung seiner Schwere = q; OB des Abstand des in B angebrachten Körpers = 3, und die Bemühung seine Schwere = Q, die Schwere selbst aber an beiden Körpern gleich; so ist zu erweisen, daß:

$$q : Q = AO : OB = 2 : 3.$$

Betrachtet derowegen, daß beide Körper vermög ihrer Schwere zu fallen trachten, aber beide durch den Hebel und seinen Ruhepunkt daran verhindert werden, nichts destoweniger üben sie ihre Bemühung zu fallen aus. Wenn nun B in einem gewissen kleinen Zeitraume

me den Bogen BE beschreibet, so kan A nicht anders als den Bogen AD in eben der Zeit beschreiben; nun aber stellen diese Bögen die durchlaufenen Räume, und folglich die Geschwindigkeiten vor §. 11. und diese verhalten sich wie ihre Radien §. 148. Geomet. also verhalten sich auch die Geschwindigkeiten wie diese Radien oder Abstände, weil ferner die Bemühung der Schwere gleich dem Produkt aus der Masse oder Schwere in die Geschwindigkeit ist, und beide Körper gleiche Schwere haben, so verhalten sich die Bemühungen ihrer Schwere wie die Geschwindigkeiten oder Abstände von dem Ruhepunkt d. i.

$$q : Q = AO : OB = 2 : 3.$$

Zusatz.

§. 180. Je grösser also der Abstand eines Körpers von seinen Ruhepunkt ist, um so grösser ist auch das Bemühen seiner Schwere, und um dasselbe zu finden, darf man nur die Masse desselben mit diesem Abstand multipliciren.

In diesem Lehrsatz beruhet eigentlich der Grund der Schnelwagen, und überhaupt aller Gegengewichter. Es ist daher leicht zu begreifen, wie man an der erstern durch ein ziemlich leichtes angehangenes Gewicht, grosse Lasten abwiegen könne.

Lehrsatz.

§. 181. Wenn zween Körper an einen Hebel, der für sich ganz ohne Schwere ist, angebracht werden, und ihre Massen oder Gewichte mit ihren Abständen von dem Ruhepunkt in verkehrter Verhältnis stehen, so halten sie einander das Gleichgewicht und umgekehrt.

Fig. 37. Beweis: Wenn wir die Masse oder das Gewicht des Körpers in A = M, und die von dem in B = m nennen, und sich dieselben vermög Bedingnis wie ihre Abstände umgekehrt verhalten, so ist

$$M : m = OB : OA.$$

Wenn wir ferner die Geschwindigkeit von A = c und die von B = C setzen, so ist, weil sich solche wie die Abstände verhalten:

$$c : C = OA : OB.$$

Multipliciren wir nun die Sätze der beiden Proportionen mit einander, so ist

$$Mc : mC = OB \times OA : OA \times OB.$$

Nun aber stellet die vordere Verhältnis die Bemühungen der Schwere der beiden Körper vor §. 5. die hintere aber bestehet aus den Produkten der Abstände, und ihre Glieder sind einander gleich, also sind auch die vordere einander gleich d. i. Mc = mC, und folglich stehen beide Körper im Gleichgewichte §. 172. oder umgekehrt.

Eben dieses hat auch an einen Hebel der eine Schwere hat, oder ein phisikalischer ist, staat, wenn zuvor die ungleiche Schwere seiner ungleich langen Armen auf was immer für Art ins Gleichgewicht gebracht wird.

Aufgabe.

§. 182. Wenn zween ungleich schwere Körper an einen Hebel angebracht sind, und die ganze Länge des Hebels bekant ist, wie der Ruhepunkt zu finden, in welchen beide Körper, wenn der Hebel an demselben aufgehangen oder unterstützet wird, im Gleichgewicht stehen?

Auf-

Auflösung: 1. Multipliciret das Gewicht des Körpers A durch die ganze Länge AB des Hebels, d. i. durch den Abstand ihrer besondern Schwerpunkten. Fig. 37.

2. Dividiret dieses Produkt durch die Summe des Gewichts von beiden Körpern, so ist der Quotient gleich dem Abstande des gesuchten Ruhepunkts von B.

Beweis: Wenn ihr das Gewicht des Körpers A durch M und das von Körper B durch m ausdrücket,

so ist $M : m = OB : OA$. §. 181.

nun aber ist auch

$M + m : M = OB + OA : OB$. §. 214. Rechenk.

und also $\frac{M \times (OB + OA)}{M + m} = OB$.

Weil nun $OB + OA = AB$,

so ist auch $\frac{M \times AB}{M + m} = OB$

und folglich $AB - OB = AO$.

Aufgabe.

§. 183. Wie der Schwerpunkt eines Trapeziums zu finden?

Auflösung: 1. Teilet das gegebene Trapezium ABCD durch eine Diagonal BD in zwei Dreiecke ABD, und BCD. Fig. 38.

2. Suchet eines jeden Dreiecks seinen Flächeninhalt §. 178. Geomet.

3. Suchet die Schwerpunkte E und F der beiden Dreiecken §. 177. oder §. 178. und ziehet sie mit einer geraden Linie EF zusammen, so wird der gemeinschaftliche Schwerpunkt beider Dreiecken in dieser Linie irgendwo enthalten sein.

4. Teilet sowohl AB als DC in zween gleiche Teile, und ziehet die Teilungspunkten mit einer geraden Linie GH zusammen, so wird dieselbe ein Durchmesser der Schwere des Trapeziums, und folglich der Schwerpunkt desselben ebenfals darinnen und zwar in dem Durchschnitspunkt X der Linie EF sein oder

Betrachtet den Flächeninhalt der beiden Dreiecken als ihre Gewichte oder Massen, und die Linie EF als die Länge eines Hebels, an welchen ihr den Ruhepunkt X, in dem beide Dreiecke im Gleichgewicht stehen, zu suchen habt. Wenn ihr also dieser Betrachtung zufolge den Inhalt des Dreiecks ABD = m und den von BCD = M ausdrucket, so ist

$$m + M : m = EF : FX \quad \text{§. 182.}$$

und folglich $\frac{m \times EF}{m + M} = FX$

dem verlangten Ruhepunkt, der zugleich der Schwerpunkt des Trapeziums ist.

Zusaz.

Fig. 39. §. 184. Wäre der Schwerpunkt eines Trapezoides ABCD zu suchen, so teilet denselben erstlich durch die Diagonal DB in zwei Dreiecke ABD und BCD; suchet ihre Inhalte nach §. 178. Geomet. ihre Schwerpunkten E und F aber nach §. 177. und ziehet sie mit einer geraden Linie EF zusammen; ferner ziehet die Diagonal AC, suchet den Inhalt der beiden Dreiecken ABC, und ACD, und auch ihre Schwerpunkten G und I wie zuvor, ziehet solche ebenfals mit einer geraden Linie GI zusammen, so wird sich der Schwerpunkt X des Trapezoides in dem Durchschnitte der beiden Linien EF und GI befinden §. 182. oder wenn ihr euch der zwoten Diagonale AC nicht bedienen wollet, so sezet wie in voriger Aufgabe

m +

$$m + M : m = EF : FX$$

und also ist $\frac{m \times EF}{M + m} = FX$.

Aufgabe.

§. 185. Wenn mehrere schwere Körper an einen Hebel angebracht, und ihre Entfernungen von einander gegeben sind, wie der algemeine Ruhepunkt an dem Hebel zu finden, in welchen sie im Gleichgewicht stehen?

Auflösung: Es sei, daß an dem Hebel AF fünf Körper von verschiedener Schwere und in den verschiedenen Entfernungen ABDEF angebracht wären, so suchet erstlich von A und B den Ruhepunkt G, und von E und F den Ruhepunkt H nach §. 182. Fig. 40.

2. Bildet euch ein, als ob die Körper in E und F in ihrem Ruhepunkt H zusammen aufgehangen wären, und suchet nun auch den Ruhepunkt I zwischen D und H.

3. Stellet euch abermal vor, als ob die in A und B befindlichen Körper nun in G, und die in F, E und D in I zusammen aufgehangen wären. Suchet also zwischen G und I den gemeinschaftlichen Ruhepunkt C auf die vorige Art, so werden, wenn der Hebel in demselben aufgehangen oder unterstüßet wird, die fünf in ABDEF angebrachte Körper in Gleichgewicht stehen, auf die nehmliche Art müste man verfahren, wenn noch mehrere Körper vorhanden wären.

Aufgabe.

§. 186. Wie der Schwerpunkt einer unregelmässigen Polygonfläche zu finden?

Auf-

Fig. 41. Auflösung: 1. Teilet das Polygon ABCDE durch Diagonalen in so viele Dreiecke weniger zwei, als es Seiten hat.

2. Berechnet den Flächeninhalt eines ieden Dreiecks nach §. 178. Geomet. und suchet ihre besondere Schwerpunkten nach §. 177.

3. Sehet die Flächeninhalte zweier nebeneinander liegenden Dreiecken wie ABC und CAE als ihre Schwere, den Abstand FG ihrer Schwerpunkten aber als einen Hebel an, an dem die zwei Dreiecke angebracht sind, und suchet daran den Ruhepunkt, oder vielmehr den gemeinschaftlichen Schwerpunkt L der beiden Dreiecken, oder des Trapezoides ABCE nach §. 183 u. 184..

4. Ziehet diesen gemeinschaftlichen Schwerpunkt L und den Schwerpunkt H des nächst folgenden Dreieckes CED abermal mit einer geraden Linie zusammen, sehet sie als einen Hebel an, an dessen beiden Enden die Flächen ABCE und CED, deren Inhalt die Schwere derselben vorstellet, angebracht wären, und suchet den Ruhepunkt d. i. den gemeinschaftlichen Schwerpunkt I nach §. 183 u. 184. so ist derselbe der Schwerpunkt der ganzen Fläche ABCDE. Wären noch mehrere zu dem gegebenen Polygon gehörige Dreiecke vorhanden, so fahret auf gleiche Art fort den letztgefundenen Schwerpunkt mit dem des neuen Dreieckes zusammen zu ziehen, und auf dieser Linie den Ruhepunkt zu suchen, so wird endlich der letztgefundene der Schwerpunkt des gegebenen Polygons sein.

Lehrsatz.

§. 187. Die Länge eines Zirkelbogens verhält sich zu seiner Sehne, wie der Radius desselben zum Abstand

stand des Schwerpunkts des Bogens von seinen Mittelpunkt.

Beweis: Teilet erstlich den Zirkelbogen EBD in B in zween gleiche Teile, ziehet die Sehnen ED, EB und BD, und nachdem ihr die leztere zwo ebenfals wieder in zween gleiche Teile geteilet, die Teilungspunkten mit einer geraden Linie FG zusammen gehangen, und den Radius AB gezogen habt, so sind erstlich F und G die Schwerpunkten beider Sehnen EB und BD §. 176. und wenn ihr FG als einen Hebel betrachtet, der durch den Radius AB in C in zween gleiche Teile geteilet wird, und an dessen beiden Enden die zwo Sehnen EB und BD, welche man von gleicher Schwere zu sein annehmen kan §. 176. angebracht sind, so ist klar, daß C der Ruhepunkt des Hebels oder der gemeinschaftliche Schwerpunkt der beiden Sehnen sei. §. 174. Ferner ziehet die Linie AG, und betrachtet, daß wegen der Aehnlichkeit der Dreiecken BGA, GCA und BID. §. 139. Geomet. Fig. 42.

$$BD : DI = AG : AC$$

und $$2BD : 2DI = EB + BD : ED$$

Folglich ist $EB + BD : ED = AG : AC$.

D. i. die Summe der Sehnen EB und BD verhält sich zur ganzen Sehne DE, wie die Linie AG zum Abstand AC des Schwerpunkts von Mittelpunkt des Bogens.

Teilet ihr ferner den Bogen in vier gleiche Teile, und ziehet die Sehnen EH, HB, BL, LD; teilet iede in zween gleiche Teile, und ziehet die Teilungspunkten mit NO und PQ zusammen, so sind sie mit EB und BD parallel, und werden wegen der Aehnlichkeit der Dreiecken NOH und EBH, wie auch PQL und BDL durch die Radien AH und AL in S und X in zween gleiche Teile geteilet. Betrachtet ihr nun

NO und PQ als Hebel, an deren Enden die vier Sehnen angebracht sind, die man mit einer Schwere begabt ansehen kan, so sind S und X die Ruhepunkten an denselben §. 174.

Ziehet ihr ferner diese zween Ruhepunkten S und X mit einer geraden Linie, die durch den Radius AB in V in zween gleiche Teile geteilet wird, zusammen, und sehet sie abermal als einen Hebel an, an dessen ieden Ende S und X zwo der vier Sehnen mit ihrer Schwere würken, so ist V der gemeinschaftliche Ruhepunkt oder Schwerpunkt der vier Sehnen §. 174.

Nachdem die Linie AQ gezogen worden, so betrachtet, daß der Winkel XAQ den halben Bogen LD und LDG den halben Bogen BL = LD zu seinem Maaß hat, §. 77. Geomet. folglich sind sie einander gleich, und die rechtwinkelichte Dreiecke AQX und DGL einander ähnlich; derowegen ist

$$AQ : AX = DL : DG$$

und $2DL : 2DG = DL + LB : DB$

folglich ist auch $AQ : DL + LB = AX : DB$.

Auf eben diese Art sind die zwei rechtwinkelichte Dreiecke AVX und BID einander ähnlich, weil nehmlich der Winkel VAX den Bogen BL und BDI den Bogen $\frac{EHB}{2} = BL$ zu seinen Maaß hat, und folglich einander gleich sind. Derowegen ist wiederum:

$$AX : BD = AV : DI$$

und also auch $AQ : DL + LB = AV : DI$

oder $DL + LB : DI = AQ : AV$

folglich $2DL + 2LB : 2DI = AQ : AV$

d. i. $DL + LB + BH + HE : ED = AQ : AV$.

D. i. die Summe der vier Sehnen verhält sich zur Sehne des ganzen Bogens, wie die Linie AQ zum

Ab-

Abstand des Schwerpunkts V von dem Mittelpunkt des Bogens.

Zerteilet man nun den ganzen Bogen in unendlich kleine Teile, so werden derselben kleine Sehnen dem Bogen selbst, und die Linie AQ dem Radius gleich werden, und läst sich von ihnen das nehmliche wie hier erweisen, also ist auch erwiesen, daß die Länge eines Zirkelbogens sich zu seiner Sehne, wie der Radius desselben zum Abstand des Schwerpunkts des Bogens von seinem Mittelpunkt verhalte.

Die Anfänger müssen sich mit diesem etwas weitschichtigen Beweis befriedigen, weil er sich nicht wohl kürzer geben läst ohne die höhere Geometrie zu Hülfe zu nehmen, und dennoch zur Einsicht und Verständnis des folgenden nothwendig ist.

Aufgabe.

§. 188. Wie der Schwerpunkt eines Zirkelbogens zu finden, dessen Radius und Grade gegeben sind? Fig. 42.

Auflösung: 1. Nehmet den Radius AB anfänglich in solchen Teilen an, als ihr den Sinus totus in der Sinustafel findet; dupliret denselben, um den Durchmesser zu haben. Suchet hierauf durch eine bekante Verhältnis des Durchmessers zum Umkreis den Umkreis des ganzen Zirkels, und saget: wie 360 Grade zur Anzahl der Graden des Bogens, eben so verhält sich der ganze Umkreis zum Bogen selbst.

2. Halbiret die Anzahl der Grade des gegebenen Bogens, nehmet für dieselbe den Sinus aus der Tafel, und dupliret ihn, so habt ihr die Länge der Sehne ED des Bogens. §. 428. Nr. 6. Geomet.

3. Sezet nach obigen Lehrsaz: wie die Länge des gegebenen Bogens EBD zu seiner Sehne ED in Teilen des Sinus totus, eben so verhält sich der Radius AB zum Abstand AV des Schwerpunktes von Mittelpunkt in dem gegebenen Teilen des Radius d. i.

$$EBD : ED = AB : AV.$$

Z. B. Es sei ein Bogen von 142 Grad, und dessen Radius $= 5148''''$ gegeben, und man nähme den Sinus totus $= 100000$, und die Verhältnis des Durchmessers zum Umkreis wie $1000 : 3141$ an, so ist

$$1000 : 3141 = 200000 : x$$

und $\frac{200000 \times 3141}{1000} = 628200$ dem ganzen Umkreis.

Ferner $360^\circ : 142^\circ = 628200 : x$

und $\frac{628200 \times 142}{360} = 247790$ dem Bogen.

Sinus von $71^\circ = 94552 = DI$

und $94552 \times 2 = 189104$ der Sehne ED.

Endlich $247790 : 189104 = 5148'''' : x$

und $\frac{189104 \times 5148}{247790} = 3928''''$ Abstand des Schwerpunktes von Mittelpunkt des Bogens auf dem Radius AB, der den Bogen in zween Teile teilet.

Zusaz.

Fig. 43. §. 189. Wäre der Schwerpunkt zu einem halben Zirkelbogen EBD zu finden, so ist nach §. 188.

EBD :

$$EBD : ED = AB : AC$$

Weil aber $ED = 2AB$, und $\frac{EBD}{2} = EB$

so ist $EBD : 2AB = AB : AC$

und $\frac{2\overline{AB}^2}{EBD} = AC$

folglich $\frac{\overline{AB}^2}{EB} = AC.$

D. i. man mus den Radius quadriren, und das Quadrat mit der Länge des Viertelzirkelbogens dividiren, um den Abstand des Schwerpunktes C von dem Mittelpunkt A auf dem Radius AB, der perpendikular auf ED ist, zu bekommen.

Aufgabe.

§. 190. Wie der Schwerpunkt eines Ausschnittes (Sector) einer Zirkelfläche zu finden?

Auflösung: 1. Wenn ABEDA der Ausschnit, in welchen der Schwerpunkt zu suchen ist, so ziehet in demselben mit einem Radius $AF = \frac{2}{3} AB$ den Bogen FIG; suchet seine Länge in Teilen des Radius, und auch die Länge der Sehne FG nach §. 188. Fig. 44.

2. Setzet: $FIG : FG = AI : AC.$

Folglich ist $\frac{FG \times AI}{FIG} = AC$ dem Abstand des Schwerpunkts C des Ausschnittes von seinem Mittelpunkt A auf dem Radius AE, der den Ausschnit in zween gleiche Teile teilet.

Beweis: Bildet euch ein, als ob der Ausschnit ABEDA in unendlich schmahle Ausschnitte zerteilet,

 wäre;

wäre; da nun ihre Bögen unendlich klein sind, so kan man ieden als eine gerade Linie, und folglich die Ausschnitte selbst als Dreiecke ansehen; nun aber sind die Schwerpunkten dieser Dreiecken $\frac{2}{3}$AB oder $\frac{2}{3}$AE = AI = AF von A entfernet §. 177 u. 178, folglich befinden sich dieselbe alle in den Bogen FIG, und wenn man daher den Schwerpunkt C zu diesem Bogen nach §. 188. suchet, so ist derselbe zugleich der Schwerpunkt des Ausschnittes.

Zusatz.

Fig. 45. §. 191. Hättet ihr den Schwerpunkt einer halben Zirkelfläche BED zu finden, so ziehet erstlich mit einem Radius AI = $\frac{2}{3}$AE den Bogen FIG, und setzet:

$$FIG : FG = AI : AC. \text{ §. } 190.$$

Folglich ist $\frac{FG \times AI}{FIG} = AC.$

Weil aber $FG = 2AI$,

so ist $\frac{2AI \times AI}{FIG} = AC.$

Weil ferner $\frac{FIG}{2} = FI$

so ist $\frac{\overline{AI}^2}{FI} = AC$

und da $AI = \frac{2}{3}AE$, folglich auch $FI = \frac{2}{3}BE$ ist,

so ist endlich $\frac{\frac{4}{9}\overline{AE}^2}{\frac{2}{3}BE} = AC.$

D. i. Man mus $\frac{2}{3}$ von dem Radius AE der halben Zirkelfläche quadriren, und mit $\frac{2}{3}$BE d. i. mit der Länge des Bogens von 60 Graden dividiren, so ist der Quotient = AC dem Abstand des Schwerpunkts von Mittelpunkt A der halben Zirkelfläche auf dem Radius AE der Perpendikular auf BD stehet gleich.

Auf-

Aufgabe.

§. 192. Wie der Schwerpunkt eines Abschnittes einer Zirkelfläche zu finden?

Auflösung: 1. Suchet den Flächeninhalt des Ausschnittes ABEDA, des Abschnittes BEDB selbst, und des Dreiecks ABD nach §. 216. 218. 178. Geom. Fig. 46.

2. Suchet den Schwerpunkt C des Dreieckes ABD nach §. 177. und auch den Schwerpunkt F des Ausschnittes ABEDA.

3. Drücket den Inhalt des Dreieckes ABD durch M, und den des Abschnittes BEDB durch m aus und setzet:

$$m : M = FC : FG.$$

Folglich ist $\frac{M \times FC}{m} = FG$ dem Abstand des Schwerpunktes G des Abschnittes von dem Schwerpunkt F des Ausschnittes.

Beweis: Betrachtet, daß F der Schwerpunkt des Ausschnittes zugleich der gemeine Schwerpunkt des Dreieckes ABD, und des Abschnittes BEDB sei, weil der erstere wirklich aus den leztern zweien bestehet. Sehet ihr nun CG als einen Hebel an, dessen Ruhepunkt in F, und an dessen einen Ende C der Inhalt oder die Schwere des Dreieckes ABD, an dem andern G aber der Inhalt oder die Schwere des Abschnittes BEDB angebracht ist, so könt ihr schliessen, daß:

$$m : M = FC : FG. \text{ §. } 181.$$

und folglich $\frac{M \times FC}{m} = FG$.

Zusatz.

Fig. 47. §. 193. Aus dem nehmlichen Grunde, und fast auf ähnliche Art läst sich der Schwerpunkt von Flächen finden, die aus mehrern zusammengesetzt betrachtet werden können. Als z. B. es würde der Schwerpunkt in der Fläche ABCDEA die aus einer halben Zirkelfläche und Recktangel zusammengesetzt ist, verlanget; so suchet erstlich den Inhalt des erstern §. 213. Geomet. und benennet ihn mit m; und seinen Schwerpunkt F §. 191. und dann auch den Inhalt des andern §. 168. Geomet. benennet ihn mit M, und seinen Schwerpunkt G §. 170. alsdann aber setzet:

$$m + M : M = FG : FX.\ §.\ 182.$$

folglich ist $\frac{M \times FG}{m + M} = FX$ dem Abstand des Schwerpunkts X der zusammengesetzten Fläche von dem Schwerpunkte F der halben Zirkelfläche.

Zusatz.

Fig. 48. §. 194. Wäre der Schwerpunkt einer Fläche wie BOPCRB, woran die krumme Linie ein Zirkelbogen ist, zu finden; so suchet erstlich den Flächeninhalt des Abschnittes BRCB; den des Dreieckes ABC, und des Trapeziums AOPC nach §. 218. 178. 199. benennet den des erstern mit m, den des zweiten mit n, und den des dritten mit q. Ferner suchet auch den Schwerpunkt F des Abschnittes BRCB §. 192. den Schwerpunkt G des Dreieckes ABC §. 177. und auch den Schwerpunkt H des Trapeziums AOPC. §. 183. Ziehet durch FG eine gerade Linie, sehet sie als einen Hebel an, und betrachtet, daß alle Teile des Dreieckes ABC in ihren Schwerpunkt G im Gleichgewicht stehen, und daß der Abschnit BRCB und die Fläche

BACRB zusammen den Inhalt desselben ausmachen. Bildet euch ferner ein, daß der Inhalt m oder die Schwere des Abschnittes in F, der Inhalt, oder die Schwere von BACRB = n — m auf der verlängerten Linie FG irgend wo in I angebracht, und G der Ruhepunkt des Hebels FI sei, so findet ihr die Entfernung GI oder vielmehr den Schwerpunkt I der Fläche BACRB, wenn ihr setzet;

$$n - m : m = GF : GI$$

folglich ist $\frac{m \times GF}{n - m} = GI.$

Ziehet ihr nun I und H ebenfals wieder mit einer geraden Linie zusammen, sehet sie als einen Hebel an, an dessen einem Ende I der Inhalt oder die Schwere von BACRB = n — m, an dem andern H aber der Inhalt oder die Schwere von AOPC = q angebracht wäre, so habt ihr eigentlich an diesen Hebel den Ruhepunkt L zu suchen indem ihr setzet:

$$n - m + q : q = IH : IL$$

folglich ist $\frac{q \times IH}{n - m + q} = IL$

dem Abstande des Ruhepunktes von I, welcher zugleich auch der Schwerpunkt der ganzen Fläche BOPCRB ist.

Auf eine ähnliche Art lassen sich die Schwerpunkten von verschiedenen zusammengesetzten Flächen finden, wir werden in der Folge sehen, zu was sie eigentlich dienen können. Man lasset es übrigens der Neugierde und dem Vergnügen der Anfänger über, wie die wahre Lage der solchergestalt bestimmten Schwerpunkten in Ansehung der Seiten der Flächen durch die Trigonometrie zu finden sei.

Lehrsaz.

§. 195. Der Inhalt einer Fläche, die aus der Bewegung einer Linie, oder der Inhalt eines Körpers, der aus der Bewegung einer Fläche entstehet, ist gleich dem Produkt aus der erzeugenden Linie oder Fläche in den Weg, den ihr Schwerpunkt bei der Erzeugung beschreibet.

Beweis: Wenn man sich vorstellet, daß eine Fläche durch die Bewegung einer Linie, oder ein Körper durch die Bewegung einer Fläche erzeuget werde, so siehet man, daß ihr Inhalt aus lauter Elementen bestehe, die dem erzeugenden gleich sind. Eignet man nun dem erzeugenden Elemente den so vielten Teil der Schwere der Fläche oder des Körpers zu, als Elemente vorhanden sind, und bildet sich ein, die Schwere eines solchen Elements sei in dessen Schwerpunkt versamlet, so läst sich die ganze Schwere der Fläche oder des Körpers durch die Schwere des erzeugenden Elements multiplicirt durch die Länge des Wegs, welchen der Schwerpunkt desselben beider Erzeugung machen muste, ausdrücken; weil würklich so viele Elemente vorhanden sind, als die Länge dieses Wegs beträgt. Nun aber kan man das Gewicht, oder die Masse, oder den Inhalt von gleichartigen Flächen oder Körpern eines für das andere nehmen §. 167.; also kan man auch sagen, daß der Inhalt einer Fläche oder eines Körpers, welcher aus der Bewegung einer Linie oder Fläche entstanden ist, dem Produkte aus der erzeugenden Linie oder Fläche in den Weg den ihr Schwerpunkt beschreibt, gleich sei.

Zusaz.

Fig. 49. §. 196. Um also 1. den Flächeninhalt eines Rechtangels ABFE zu erhalten, muß man das erzeugende Ele-

Element AB durch die Länge des Weges CD, den dessen Schwerpunkt C beschreibet, multipliciren.

2. Ist der Flächeninhalt eines Zirkels gleich dem Produkt seines Radius AB in den Umkreis CEDC, welchen der Schwerpunkt C des Radius, oder vielmehr der halbe Radius beschreibt. Fig. 50.

3. Der Flächeninhalt der halben Kronne AHFDIB ist gleich dem Produkt der erzeugenden Linie AB in den Weg CGE, welchen der Schwerpunkt C der erzeugenden Linie AB beschreibet. Fig. 51.

Die Anfänger sehen, daß alles dieses mit den in der Geometrie angegebenen Gründen volkommen übereinstimmig ist.

Zusaz.

§. 197. 1. Der körperliche Inhalt eines Parallelopipedums ist also gleich dem Produkt des Inhaltes der erzeugenden Fläche in den Weg ihres Schwerpunktes.

2. Der körperliche Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Produkte des Inhalts der erzeugenden Fläche ABED in den Umkreis CF, den der Schwerpunkt C beschreibet. Fig. 52.

3. Der körperliche Inhalt eines Kegels ist gleich dem Produkt der erzeugenden Fläche ABD in den Umkreis CIF ihres Schwerpunkts C. Fig. 53.

4. Ist in einen Cylinder oder abgestuzten Kegel ein anderer Körper, wie z. B. in fig. 54. ausgehöllet, so ist ihre erzeugende Fläche ABDE, und der Weg welchen ihr Schwerpunkt C nehmen mus = dem Umkreis CIF, folglich der körperliche Inhalt gleich dem Inhalt der erzeugenden Fläche in dem Weg des Schwerpunkts. Fig. 54.

NO und PQ als Hebel, an deren Enden die vier Sehnen angebracht sind, die man mit einer Schwere begabt ansehen kan, so sind S und X die Ruhepunkten an denselben §. 174.

Ziehet ihr ferner diese zween Ruhepunkten S und X mit einer geraden Linie, die durch den Radius AB in V in zween gleiche Teile geteilet wird, zusammen, und sehet sie abermal als einen Hebel an, an dessen ieden Ende S und X zwo der vier Sehnen mit ihrer Schwere würken, so ist V der gemeinschaftliche Ruhepunkt oder Schwerpunkt der vier Sehnen §. 174.

Nachdem die Linie AQ gezogen worden, so betrachtet, daß der Winkel XAQ den halben Bogen LD und LDG den halben Bogen BL = LD zu seinem Maaß hat, §. 77. Geomet. folglich sind sie einander gleich, und die rechtwinkelichte Dreiecke AQX und DGL einander ähnlich; derowegen ist

$$AQ : AX = DL : DG$$

und $2DL : 2DG = DL + LB : DB$

folglich ist auch $AQ : DL + LB = AX : DB$.

Auf eben diese Art sind die zwei rechtwinkelichte Dreiecke AVX und BID einander ähnlich, weil nehmlich der Winkel VAX den Bogen BL und BDI den Bogen $\frac{EHB}{2} = BL$ zu seinen Maaß hat, und folglich einander gleich sind. Derowegen ist wiederum:

$$AX : BD = AV : DI$$

und also auch $AQ : DL + LB = AV : DI$

oder $DL + LB : DI = AQ : AV$

folglich $2DL + 2LB : 2DI = AQ : AV$

d. i. $DL + LB + BH + HE : ED = AQ : AV$.

D. i. die Summe der vier Sehnen verhält sich zur Sehne des ganzen Bogens, wie die Linie AQ zum

Ab-

Abstand des Schwerpunkts V von dem Mittelpunkt A des Bogens.

Zerteilet man nun den ganzen Bogen in unendlich kleine Teile, so werden derselben kleine Sehnen dem Bogen selbst, und die Linie AQ dem Radius gleich werden, und läst sich von ihnen das nehmliche wie hier erweisen, also ist auch erwiesen, daß die Länge eines Zirkelbogens sich zu seiner Sehne, wie der Radius desselben zum Abstand des Schwerpunkts des Bogens von seinem Mittelpunkt verhalte.

Die Anfänger müssen sich mit diesem etwas weitschichtigen Beweis befriedigen, weil er sich nicht wohl kürzer geben läst ohne die höhere Geometrie zu Hülfe zu nehmen, und dennoch zur Einsicht und Verständnis des folgenden nothwendig ist.

Aufgabe.

§. 188. Wie der Schwerpunkt eines Zirkelbogens zu finden, dessen Radius und Grade gegeben sind? Fig. 42.

Auflösung: 1. Nehmet den Radius AB anfänglich in solchen Teilen an, als ihr den Sinus totus in der Sinustafel findet; dupliret denselben, um den Durchmesser zu haben. Suchet hierauf durch eine bekante Verhältnis des Durchmessers zum Umkreis den Umkreis des ganzen Zirkels, und saget: wie 360 Grade zur Anzahl der Graden des Bogens, eben so verhält sich der ganze Umkreis zum Bogen selbst.

2. Halbiret die Anzahl der Grade des gegebenen Bogens, nehmet für dieselbe den Sinus aus der Tafel, und duplirt ihn, so habt ihr die Länge der Sehne ED des Bogens. §. 428. Nr. 6. Geomet.

3. Setzet nach obigen Lehrsatz: wie die Länge des gegebenen Bogens EBD zu seiner Sehne ED in Teilen des Sinus totus, eben so verhält sich der Radius AB zum Abstand AV des Schwerpunktes von Mittelpunkt in dem gegebenen Teilen des Radius d. i.

$$EBD : ED = AB : AV.$$

Z. B. Es sei ein Bogen von 142 Grad, und dessen Radius = 5148'''' gegeben, und man nähme den Sinus totus = 100000, und die Verhältnis des Durchmessers zum Umkreis wie 1000 : 3141 an, so ist

$$1000 : 3141 = 200000 : x$$

und $\frac{200000 \times 3141}{1000} = 628200$ dem ganzen Umkreis.

Ferner $360° : 142° = 628200 : x$

und $\frac{628200 \times 142}{360} = 247790$ dem Bogen.

Sinus von $71° = 94552 = DI$

und $94552 \times 2 = 189104$ der Sehne ED.

Endlich $247790 : 189104 = 5148'''' : x$

und $\frac{189104 \times 5148}{247790} = 3928''''$ Abstand des Schwerpunktes von Mittelpunkt des Bogens auf dem Radius AB, der den Bogen in zween Teile teilet.

Zusatz.

Fig. 43. §. 189. Wäre der Schwerpunkt zu einem halben Zirkelbogen EBD zu finden, so ist nach §. 188.

EBD :

$$EBD : ED = AB : AC$$

Weil aber $ED = 2AB$, und $\frac{EBD}{2} = EB$

so ist $EBD : 2AB = AB : AC$

und $\frac{2\overline{AB}^2}{EBD} = AC$

folglich $\frac{\overline{AB}^2}{EB} = AC$.

D. i. man mus den Radius quadriren, und das Quadrat mit der Länge des Viertelzirkelbogens dividiren, um den Abstand des Schwerpunktes C von dem Mittelpunkt A auf dem Radius AB, der perpendikular auf ED ist, zu bekommen.

Aufgabe.

§. 190. Wie der Schwerpunkt eines Ausschnittes (Sector) einer Zirkelfläche zu finden?

Auflösung: 1. Wenn ABEDA der Ausschnit, in welchen der Schwerpunkt zu suchen ist, so ziehet in demselben mit einem Radius $AF = \frac{2}{3} AB$ den Bogen FIG; suchet seine Länge in Teilen des Radius, und auch die Länge der Sehne FG nach §. 188. Fig. 44.

2. Sezet: $FIG : FG = AI : AC$.

Folglich ist $\frac{FG \times AI}{FIG} = AC$ dem Abstand des Schwerpunkts C des Ausschnittes von seinem Mittelpunkt A auf dem Radius AE, der den Ausschnit in zween gleiche Teile teilet.

Beweis: Bildet euch ein, als ob der Ausschnit ABEDA in unendlich schmahle Ausschnitte zerteilet,

 wäre;

wäre; da nun ihre Bögen unendlich klein sind, so kan man ieden als eine gerade Linie, und folglich die Ausschnitte selbst als Dreiecke ansehen; nun aber sind die Schwerpunkten dieser Dreiecken $\frac{2}{3}$AB oder $\frac{2}{3}$AE = AI = AF von A entfernet §. 177 u. 178, folglich befinden sich dieselbe alle in den Bogen FIG, und wenn man daher den Schwerpunkt C zu diesem Bogen nach §. 188. suchet, so ist derselbe zugleich der Schwerpunkt des Ausschnittes.

Zusatz.

Fig. 45. §. 191. Hättet ihr den Schwerpunkt einer halben Zirkelfläche BED zu finden, so ziehet erstlich mit einem Radius AI = $\frac{2}{3}$AE den Bogen FIG, und setzet:

$$FIG : FG = AI : AC. \text{ §. 190.}$$

Folglich ist $\frac{FG \times AI}{FIG} = AC.$

Weil aber $FG = 2AI$,

so ist $\frac{2AI \times AI}{FIG} = AC.$

Weil ferner $\frac{FIG}{2} = FI$

so ist $\frac{\overline{AI}^2}{FI} = AC$

und da $AI = \frac{2}{3}AE$, folglich auch $FI = \frac{2}{3}BE$ ist,

so ist endlich $\frac{\frac{4}{9}\overline{AE}^2}{\frac{2}{3}BE} = AC.$

D. i. Man mus $\frac{2}{3}$ von dem Radius AE der halben Zirkelfläche quadriren, und mit $\frac{2}{3}$BE d. i. mit der Länge des Bogens von 60 Graden dividiren, so ist der Quotient = AC dem Abstand des Schwerpunkts von Mittelpunkt A der halben Zirkelfläche auf dem Radius AE der Perpendikular auf BD stehet gleich.

Auf-

Aufgabe.

§. 192. Wie der Schwerpunkt eines Abschnittes einer Zirkelfläche zu finden?

Auflösung: 1. Suchet den Flächeninhalt des Ausschnittes ABEDA, des Abschnittes BEDB selbst, und des Dreiecks ABD nach §. 216. 218. 178. Geom. Fig. 46.

2. Suchet den Schwerpunkt C des Dreieckes ABD nach §. 177. und auch den Schwerpunkt F des Ausschnittes ABEDA.

3. Drücket den Inhalt des Dreieckes ABD durch M, und den des Abschnittes BEDB durch m aus und setzet:

$$m : M = FC : FG.$$

Folglich ist $\frac{M \times FC}{m} = FG$ dem Abstand des Schwerpunktes G des Abschnittes von dem Schwerpunkt F des Ausschnittes.

Beweis: Betrachtet, daß F der Schwerpunkt des Ausschnittes zugleich der gemeine Schwerpunkt des Dreieckes ABD, und des Abschnittes BEDB sei, weil der erstere wirklich aus den letztern zweien bestehet. Sehet ihr nun CG als einen Hebel an, dessen Ruhepunkt in F, und an dessen einen Ende C der Inhalt oder die Schwere des Dreieckes ABD, an dem andern G aber der Inhalt oder die Schwere des Abschnittes BEDB angebracht ist, so könt ihr schliessen, daß:

$$m : M = FC : FG. \text{ §. } 181.$$

und folglich $\frac{M \times FC}{m} = FG.$

Zusatz.

Fig. 47. §. 193. Aus dem nehmlichen Grunde, und fast auf ähnliche Art läst sich der Schwerpunkt von Flächen finden, die aus mehrern zusammengesezt betrachtet werden können. Als z. B. es würde der Schwerpunkt in der Fläche ABCDEA die aus einer halben Zirkelfläche und Recktangel zusammengesezt ist, verlanget; so suchet erstlich den Inhalt des erstern §. 213. Geomet. und benennet ihn mit m: und seinen Schwerpunkt F §. 191. und dann auch den Inhalt des andern §. 168. Geomet. benennet ihn mit M, und seinen Schwerpunkt G §. 170. alsdann aber sezet:

$$m + M : M = FG : FX. \text{ §. 182.}$$

folglich ist $\frac{M \times FG}{m + M} = FX$ dem Abstand des Schwerpunkts X der zusammengesezten Fläche von dem Schwerpunkte F der halben Zirkelfläche.

Zusatz.

Fig. 48. §. 194. Wäre der Schwerpunkt einer Fläche wie BOPCRB, woran die krumme Linie ein Zirkelbogen ist, zu finden; so suchet erstlich den Flächeninhalt des Abschnittes BRCB; den des Dreieckes ABC, und des Trapeziums AOPC nach §. 218. 178. 199. benennet den des erstern mit m, den des zweiten mit n, und den des dritten mit q. Ferner suchet auch den Schwerpunkt F des Abschnittes BRCB §. 192. den Schwerpunkt G des Dreieckes ABC §. 177. und auch den Schwerpunkt H des Trapeziums AOPC. §. 183. Ziehet durch FG eine gerade Linie, sehet sie als einen Hebel an, und betrachtet, daß alle Teile des Dreieckes ABC in ihren Schwerpunkt G im Gleichgewicht stehen, und daß der Abschnit BRCB und die Fläche

BACRB

BACRB zusammen den Inhalt desselben ausmachen. Bildet euch ferner ein, daß der Inhalt m oder die Schwere des Abschnittes in F, der Inhalt, oder die Schwere von BACRB = n — m auf der verlängerten Linie FG irgend wo in I angebracht, und G der Ruhepunkt des Hebels FI sei, so findet ihr die Entfernung GI oder vielmehr den Schwerpunkt I der Fläche BACRB, wenn ihr setzet;

$$n - m : m = GF : GI$$

folglich ist $\frac{m \times GF}{n - m} = GI.$

Ziehet ihr nun I und H ebenfals wieder mit einer geraden Linie zusammen, sehet sie als einen Hebel an, an dessen einem Ende I der Inhalt oder die Schwere von BACRB = n — m, an dem andern H aber der Inhalt oder die Schwere von AOPC = q angebracht wäre, so habt ihr eigentlich an diesen Hebel den Ruhepunkt L zu suchen indem ihr setzet:

$$n - m + q : q = IH : IL$$

folglich ist $\frac{q \times IH}{n - m + q} = IL$

dem Abstande des Ruhepunktes von I, welcher zugleich auch der Schwerpunkt der ganzen Fläche BOPCRB ist.

Auf eine ähnliche Art lassen sich die Schwerpunkten von verschiedenen zusammengesetzten Flächen finden, wir werden in der Folge sehen, zu was sie eigentlich dienen können. Man lasset es übrigens der Neugierde und dem Vergnügen der Anfänger über, wie die wahre Lage der solchergestalt bestimten Schwerpunkten in Ansehung der Seiten der Flächen durch die Trigonometrie zu finden sei.

Lehrsatz.

§. 195. Der Inhalt einer Fläche, die aus der Bewegung einer Linie, oder der Inhalt eines Körpers, der aus der Bewegung einer Fläche entstehet, ist gleich dem Produkt aus der erzeugenden Linie oder Fläche in den Weg, den ihr Schwerpunkt bei der Erzeugung beschreibet.

Beweis: Wenn man sich vorstellet, daß eine Fläche durch die Bewegung einer Linie, oder ein Körper durch die Bewegung einer Fläche erzeuget werde, so siehet man, daß ihr Inhalt aus lauter Elementen bestehe, die dem erzeugenden gleich sind. Eignet man nun dem erzeugenden Elemente den so vielten Teil der Schwere der Fläche oder des Körpers zu, als Elemente vorhanden sind, und bildet sich ein, die Schwere eines solchen Elements sei in dessen Schwerpunkt versamlet, so läst sich die ganze Schwere der Fläche oder des Körpers durch die Schwere des erzeugenden Elements multiplicirt durch die Länge des Wegs, welchen der Schwerpunkt desselben beider Erzeugung machen muste, ausdrücken; weil würklich so viele Elemente vorhanden sind, als die Länge dieses Wegs beträgt. Nun aber kan man das Gewicht, oder die Masse, oder den Inhalt von gleichartigen Flächen oder Körpern eines für das andere nehmen §. 167.; also kan man auch sagen, daß der Inhalt einer Fläche oder eines Körpers, welcher aus der Bewegung einer Linie oder Fläche entstanden ist, dem Produkte aus der erzeugenden Linie oder Fläche in den Weg den ihr Schwerpunkt beschreibt, gleich sei.

Zusatz.

Fig. 49. §. 196. Um also 1. den Flächeninhalt eines Rectangels ABFE zu erhalten, muß man das erzeugende Ele-

Element AB durch die Länge des Weges CD, den dessen Schwerpunkt C beschreibet, multipliciren.

2. Ist der Flächeninhalt eines Zirkels gleich dem Produkt seines Radius AB in den Umkreis CEDC, welchen der Schwerpunkt C des Radius, oder vielmehr der halbe Radius beschreibt. Fig. 50.

3. Der Flächeninhalt der halben Kronne AHFDIB ist gleich dem Produkt der erzeugenden Linie AB in den Weg CGE, welchen der Schwerpunkt C der erzeugenden Linie AB beschreibet. Fig. 51.

Die Anfänger sehen, daß alles dieses mit den in der Geometrie angegebenen Gründen volkommen übereinstimmig ist.

Zusaz.

§. 197. 1. Der körperliche Inhalt eines Parallelopipedums ist also gleich dem Produkt des Inhaltes der erzeugenden Fläche in den Weg ihres Schwerpunktes.

2. Der körperliche Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Produkte des Inhalts der erzeugenden Fläche ABED in den Umkreis CF, den der Schwerpunkt C beschreibet. Fig. 52.

3. Der körperliche Inhalt eines Kegels ist gleich dem Produkt der erzeugenden Fläche ABD in den Umkreis CIF ihres Schwerpunkts C. Fig. 53.

4. Ist in einen Cylinder oder abgestuzten Kegel ein anderer Körper, wie z. B. in fig. 54. ausgehöllet, so ist ihre erzeugende Fläche ABDE, und der Weg welchen ihr Schwerpunkt C nehmen mus = dem Umkreis CIF, folglich der körperliche Inhalt gleich dem Inhalt der erzeugenden Fläche in dem Weg des Schwerpunkts. Fig. 54.

Fig. 55. 5. Wäre der Inhalt der fig. 55. vorgestelten Körper zu berechnen, so betrachtet, daß ABDE ihre erzeugenden Flächen, C derselben Schwerpunkten, CIF aber die Wege sind, welche sie zu beschreiben haben, derowegen ist nach obigen Lehrsaß ihr körperlicher Inhalt = ABDE × CIF.

Auf ähnliche Art läst sich der Inhalt von allen Körpern, deren erzeugende Fläche sich um eine Achse drähet, finden; der sich sonsten durch die gemeine Gründe der Geometrie nicht berechnen liesse. Es ist also die Mathematik durch diese sehr schöne Erfindung der Theorie des Schwerpunktes ungemein bereichert worden.

Zusaß.

§. 198. Da man das Metal an einer Kannone oder einen Böller (ohne ihren Schildzapfen) als einen Körper betrachten kan, der durch die Herumdrähung einer erzeugenden Fläche um eine Achse entstanden ist, so läst sich auch der körperliche Inhalt, und folglich die Schwere desselben nach den angeführten Gründen berechnen, wenn man die ganze erzeugende Fläche nach Erfordernis in mehrere kleinere zerteilet, an denen sich die Schwerpunkten leichter nach den obigen Gründen finden lassen; hierauf die Umkreise oder Wege dieser besondern Schwerpunkten suchet, die Inhalte dieser besondern Körper nach §. 197. berechnet, und dieselbe endlich in eine Summe bringet, welche dem körperlichen Inhalt der Kannone oder des Böllers ohne ihren Schildzapfen gleich sein wird. Der körperliche Inhalt eines Schildzapfens aber läst sich aus den bisher gegebenen Gründen nicht genau berechnen, sondern man mus dazu die höhere Geometrie zu Hülf nehmen. Man kan aber demselben durch Annäherung mittelst der gemei-

meinen Geometrie so nahe kommen, daß man die dabei gemachten Abweichungen in der Ausübung ohne aller Besorgnis hinweglassen kan.

Übrigens ist leicht zu begreifen, wie nothwendig es überhaupt einem geschickten Artilleristen seie, die Schwere des Metals einer Kannone berechnen zu können, so oft eine nach neuen Proportionen zu entwerfen vorkomt.

Lehrsaz.

§. 199. Der Schwerpunkt einer dreieckigten Pyramide ABCS befindet sich in dem Durchschnitte G zwoer geraden Linien SF und AE, die aus den Winkeln A und S, so den Flächen SBC und ABC entgegenstehen, auf ihre Schwerpunkten E und F gezogen worden; und der Abstand SG des Schwerpunktes auf der Linie SF ist $= \frac{3}{4}$ SF.

Beweis: 1. Betrachtet, daß die dreieckigte Pyramide ABCS aus lauter Elementen bestehe, die der Grundfläche ABC ähnlich sind, und in arithmetischer Progression abnehmen; derowegen mus die gerade Linie SF, die aus dem Schwerpunkt F der Grundfläche nach S gezogen ist, durch alle Schwerpunkten dieser Elementen, und folglich auch durch den Schwerpunkt der Pyramide gehen. Ferner betrachtet, daß, weil die Pyramide dreieckig ist, man sowohl eine als die andere Seitenfläche derselben für die Grundfläche, und die gegenüberstehende Spitze der Pyramide ansehen könne. Nihmt man nun diesem zu folge die Seitenfläche BSC für die Grundfläche, und A für die Spitze an, und ziehet aus ihren Schwerpunkt E nach der Spitze A die Linie AE, so gehet dieselbe ebenfals wieder durch die Schwerpunkten aller Elementen der Fläche BSC, und folglich auch durch den Schwerpunkt Fig. 56.

der

der Pyramide selbst, und weil ieder Körper nur einen Schwerpunkt haben kan, so müssen beide Linien SF und AE sich in dem Schwerpunkt G der Pyramide durchschneiden.

2. Ziehet ihr E und F zusammen, so sind die Dreiecke FED und ASD einander ähnlich, weil DF $= \frac{1}{3}$ AD, und DE $= \frac{1}{3}$ DS ist, §. 178. und folglich FE und AS zu einander parallel sind. Aus eben der Ursach ist FE $= \frac{1}{3}$ AS, und die Dreiecke FEG und ASG sind ebenfals einander ähnlich; derowegen ist:

$$FE : AS = FG : SG$$

$$AS \text{ aber ist } = 3FE$$

$$\text{also ist } FE : 3FE = FG : SG$$

$$\text{folglich } \frac{3FE \times FG}{FE} = SG$$

$$\text{d. i. } 3FG = SG$$

$$\text{oder } SG = \tfrac{3}{4} SF.$$

Zusaz.

§. 200. Ist die Grundfläche der Pyramiden was immer für ein Polygon, so kan solche in lauter Dreiecke zerteilet werden, die man als Grundflächen so vieler Pyramiden, deren Spitzen in die gemeine Spitze der ganzen Pyramide zusammen laufen, ansehen kan. Bildet man sich ferner ein, daß von der Spitze dieser Pyramiden auf den Mittelpunkt der Schwere der Polygon Grundfläche eine Linie gezogen sei, und von einer geraden Fläche parallel mit der Grundfläche in der Entfernung von $\frac{3}{4}$ der von der Spitze nach dem Schwerpunkt gezogenen Linie durchschnitten werde, so gehet diese Fläche durch alle Schwerpunkten der dreieckigten Pyramiden, in welche die ganze zerteilet ist, und folglich durch den Schwerpunkt der polygonförmigen Pyrami-

ramiden selbst. Derowegen ist der Abstand des Schwerpunkts von der Spitze einer Pyramiden, sie mag was immer für ein Polygon zur Grundfläche haben, allezeit $\frac{3}{4}$ der Linie, so aus der Spitze der Pyramiden auf den Schwerpunkt der Grundfläche gezogen wird.

Zusaz.

§. 201. Da man einen Kegel als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten ansehen kan, §. 258. Geom. so ist auch der Schwerpunkt desselben auf der Achse $\frac{3}{4}$ derselben von der Spitze entfernt.

Aufgabe.

§. 202. Wie der Schwerpunkt eines mit seiner Grundfläche parallel abgestußten Kegels oder Pyramide zu finden?

Auflösung: 1. Berechnet den körperlichen Inhalt des ganzen Kegels oder der Pyramide und auch den des abgestuzten und abgängigen Teiles nach §. 306. Geomet.

2. Suchet den Schwerpunkt des ganzen Kegels oder der Pyramide und auch von dem abgängigen Teile, und bildet euch ein daß diese zween Punkten mit einer geraden Linie zusammen gehangen wären, und man sie als einen Hebelarm zu betrachten hätte, an dessen einen Ende der Inhalt oder die Schwere des abgängigen Kegels oder Pyramide hienge, an dem andern aber der Ruhepunkt wäre, und an den noch weiter verlängerten Teil der Inhalt oder die Schwere des abgestußten Kegel oder Pyramide angebracht wäre, folglich daß die Entfernung des Schwerpunkts des abgängigen Teiles von dem des abgestußten die ganze Länge des Hebels sei.

3.

3. Setzet: wie der Inhalt oder die Schwere des abgestutzten Kegels oder der Pyramide zum Inhalt oder Schwere des abgängigen Teiles, eben so verhält sich die Entfernung der Schwerpunkten des ganzen und abgängigen Kegels oder Pyramide zur Entfernung der Schwerpunkten des ganzen Kegels oder Pyramide und abgestutzten Teiles, d. i. der vierte Saz der Proportion drücket aus, um wie viel der Schwerpunkt des abgestutzten Kegels oder der Pyramide noch näher bei der Grundfläche als der des ganzen Kegels oder Pyramide sei.

Lehrsaz.

§. 203. Der Schwerpunkt einer halben Kugel ist auf dem Radius, der auf ihrer Grundfläche perpendikular stehet, $\frac{3}{8}$ desselben von dem Mittelpunkt der Kugel entfernet.

Fig. 57. Beweis: Wenn man sich vorstellet, als ob um die halbe Kugel AFB ein Cylinder ADEB, und auch noch ein Kegel CDE, die beide mit der halben Kugel gleiche Grundflächen, und den Radius CF derselben zur Höhe haben, beschrieben wären, so ist der Inhalt der halben Kugel $= \frac{2}{3}$, der des Kegels aber $= \frac{1}{3}$ von dem Inhalt des Cylinders. Betrachtet man ferner, daß der Schwerpunkt H des Cylinders $= \frac{1}{2}$ CF, und der des Kegels G $= \frac{3}{4}$ CF von C entfernet sei, so ist klar, daß GH $= \frac{1}{4}$ CF sein müsse. Nihmt man nun an, daß die Schwere oder der Inhalt des Kegels in G, die der halben Kugel aber irgendwo in I angebracht, und der Schwerpunkt H des Cylinders der Ruhepunkt des Hebels sei, so ist, wenn man den Inhalt oder die Schwere des Kegels durch m, und den der halben Kugel durch n ausdrückt:

$$n : m = GH : HI$$

Nun

Nun aber ist $m = \frac{1}{2} n$ §. 327. Geomet.
folglich ist auch $HI = \frac{1}{2} GH = \frac{1}{8} CF$
und da $FH = \frac{1}{2}$ oder $\frac{4}{8} CF$,
so ist $FH + HI = FI = \frac{5}{8} CF$
und also $CF - FI = CI = \frac{3}{8} CF$
d. i. die Entfernung des Schwerpunkts I der halben Kugel ist $= \frac{3}{8}$ des Radius von dem Mittelpunkt C der halben Kugel.

Der Schwerpunkt eines Abschnittes von einer Kugel läst sich durch die bisher angeführten Gründe nicht wohl bestimmen, sondern es mus die höhere Geometrie dazu zu Hülfe genommen werden. Um aber dennoch im Stande zu sein, denselben in erfoderenden Falle berechnen zu können, so setzen wir die durch die höhere Rechnung gefundene algemeine Formul hierher. Nehmlich wenn der Radius der Kugel, davon der gegebene Abschnit herrühret, $= r$, und die Höhe des Abschnittes $= x$ angenommen wird, so ist $3r - x : 2r - \frac{1}{4} x = x$: zum Abstand des Schwerpunktes von dem höchsten Punkt des Abschnittes. Dieses komt auch mit dem oben gegebenen Grunde den Schwerpunkt der halben Kugel zu berechnen überein. Denn wenn wir die halbe Kugel als einen Abschnit, dessen Höhe dem Radius selbst gleich ist, ansehen, so ist nach der gleich angeführten Formul: $3r - r : 2r - \frac{1}{4} r = r$: zum Abstand des Schwerpunkts von den höchsten Punkt der Halbkugel, den wir mit y benennen wollen. Folglich ist eigentlich

$$2r : 1\frac{1}{4}r = r : y$$

und $$\frac{rr + \frac{1}{4}rr}{2r} = y$$

setzen

setzen wir nun $r = 8$,

so ist $\frac{64 + 16}{16} = 5$.

Folglich ist der Abstand des Schwerpunkts FI $= \frac{5}{8}$ CF, und es verbleibt für CI noch $\frac{3}{8}$.

Aufgabe.

Fig. 58. §. 204. Wie der Schwerpunkt I eines Körpers AOPE in dessen Mitte ein Cylinder BSUD ausgehöllet ist, und der eigentlich aus der Umdrähung der Fläche ABDE, deren Seiten AB und ED parallel sind, um die Achse FG entstanden ist, zu finden?

Auflösung: 1. Suchet den Inhalt und Schwerpunkt der erzeugenden Fläche ABDE; berechnet mit Hülfe desselben den Inhalt des Körpers AOPE nach §. 197. Nr. 5. und benennet ihn mit n.

2. Bildet euch ein, daß um diesen Körper auch ein Cylinder, der AO zu seinen Durchmesser und FG zu seiner Achse hat, beschrieben sei; berechnet dessen Inhalt, und drücket ihn durch m aus.

3. Sehet FG als einen Hebel an, an dessen einen Ende G die Schwere oder der Inhalt des Cylinders AORL, an dem andern F aber die Summe der Schwere oder des Inhaltes des Cylinders und des Körpers AOPE angebracht ist, und suchet daran den Ruhepunkt I, in welchen beide Körper im Gleichgewicht stehen, nach §. 182. indem ihr setzet:

$$\frac{m \times FG}{m + n} = GI.$$

und $FG - GI = FI$,

so

so ist der Abstand des Schwerpunktes I des Körpers AOPE von den beiden parallelen Seiten der erzeugenden Fläche auf der Achse FG bestimt.

Zusaz.

§. 205. Auf eben diese Art läst sich auch der Schwerpunkt I des Körpers CF, der durch die Umdrähung der erzeugenden Fläche ABC um die Achse DE entstanden ist, und noch von vielen andern finden. Fig. 59.

Zusaz.

§. 206. Da die Schildzapfen einer Kannone bekanter Massen eine solche Lage haben müssen, daß, wenn man die Kannone an denselben frei aufhanget, der hintere Teil derselben etwas schwerer als der vordere sei. Um also den wahren Ort der Schildzapfen zu bestimmen, ist erforderlich, daß man den Schwerpunkt der ganzen Kannone finde, um wissen zu können, wie weit die Schildzapfen noch vor denselben angesetzt müssen werden, damit sie die obgedachte Eigenschaft erhalten. Um nun dieses zu bewerkstellen, so zeichnet die Kannone in ihrer natürlichen Grösse genau auf, zerteilet dieselbe bei den verschiedenen Verstäbungen durch Linien, so die Achse perpendikular durchschneiden, in so viele solche Körper, von welchen ihr nach den bisher gegebenen Anleitungen ihre Schwerpunkten finden könnet, sehet endlich die ganze Achse der Kannone als einen Hebel an, an welchen alle diese Körper in ihren verschiedenen Schwerpunkten angebracht sind, und suchet den gemeinschaftlichen Ruhepunkt daran nach §. 185. rucket nun diesen Punkt so weit vorwärts, bis der hintere Teil der Kannone das erforderliche Übergewicht erhaltet.

Es ist für sich klar, daß es einem gründlichen Artilleristen eben so nothwendig seie, den Ort der Schildzapfen einer Kannone richtig bestimmen zu können, als den Kubikinhalt des Metals und folglich die Schwere desselben zu berechnen. Jene Art, wo man die Kannone auf einen Papendeckel oder dünnen Bretel zeichnet, hernach ausschneidet, und mittelst einer durchgesteckten Nadel den Ruhepunkt durch Versuche findet, und denselben alsdenn etwas weiter vorrücket, um den Ort der Schildzapfen zu erhalten, ist freilich viel leichter, aber wie leicht zu erachten viel unrichtiger als die wir §. 206. vorschlagen; es bedienen sich aber auch nur diejenige davon, denen es an gehörigen Gründen der Mathematik fehlet, und die es folglich unmöglich besser machen können.

Lehrsatz.

§. 207. Wenn man sich einbildet, daß durch den Schwerpunkt was immer für eines Körpers eine Perpendikular auf dessen horizontal stehende Grundfläche gezogen sei, und dieselbe trift noch inner dieser Grundfläche auf, so ist der Körper ausser Gefahr umzufallen, wenn sonst kein andere Kraft ausser seiner Schwere in ihn würket; so bald aber diese Perpendikular auf einer Seiten ausser die Grundfläche fält, so wird der Körper auch gegen iene Seiten fallen müssen, wenn er von keiner andern Kraft aufgehalten wird.

Fig. 60. **Beweis**: 1. Wenn ein Körper z. B. wie AD gegen eine Seiten fallen sol, so ist klar, daß sich derselbe um einen der äussersten Punkten B an der Grundfläche als um einen Ruhepunkt bewegen, und der Schwerpunkt C desselben eigentlich den Bogen CF beschreiben müsse. Wenn nun die aus dem Schwerpunkt

auf

auf die Grundfläche gezogene Perpendikular CA noch immer dieselbe trift, und man ziehet die Linie CB, so ist ebenfals klar, daß der Punkt C niederer als I sei; derowegen müste, wenn dieser Körper umfallen solte, der Schwerpunkt von C bis in I steigen; da aber dieses wieder die Natur der Schwere ist, so ist auch derselbe ausser Gefahr umzufallen.

2. Fallet aber die aus dem Schwerpunkt C auf die Grundfläche HB gezogene Perpendikular CA ausser dieselbe, und man ziehet die Linie CB aus dem Schwerpunkt nach den Ruhepunkt, an welchen sich der Körper beim fallen herumdrähen mus, und auch den Bogen CF, den der Schwerpunkt beschreibet, so ist abermal klar, daß C der höchste Punkt in den Bogen CF sei, derowegen kan sich der Schwerpunkt in demselben nicht erhalten, sondern er mus vermög der Natur der Schwere näher gegen dem Mittelpunkt der Erde zu kommen trachten, folglich den Bogen CF beschreiben, oder der Körper mus fallen. Fig. 61.

Zusaz.

§. 208. Uberhaupt kan man auch sagen, daß ein Körper ausser Gefahr zu fallen ist, wenn die aus dessen Schwerpunkt nach dem Ruhepunkt gezogene Linie CB an den Punkt B einen stumpfen Winkel CBF mit der Grundlinie auswärts machet. Im gegenteil aber, daß der Körper unvermeidlich umfallen müsse, wenn dieser Winkel spizig wird.

Zusaz.

§. 209. Je breitere Grundfläche oder mindere Höhe demnach ein Körper hat, ie weniger Gefahr ist er ausgesezt umzufallen.



Zweiter Abschnit.
Von Machinen.

Erstes Hauptstück.
Von den einfachen Machinen.

Erklärung.
§. 210.

Die Machinen, so man einfache zu nennen pfleget, sind eigentlich folgende: der Hebel, das Rad an der Welle, die Flaschenscheibe, die schiefliegende Fläche oder der Keil, und die Schraube. Man heist sie aber einfach, weil sie würklich nicht aus mehrern zusammengesezt sind, und für sich allein bestehen.

Die gleich angeführten Gattungen der einfachen Machinen kan man auch nur als eine, nehmlich als einen Hebel betrachten, und man wird in der Folge sehen, daß sich keine Machine, sie sei demnach einfach oder zusammengesezt, denken läst, deren Würkung nicht als die eines oder mehrern angebrachten Hebeln angesehen werden könte.

Wenn man die Würkungen der Machinen blos theoretisch in Betrachtung ziehet, so wird weder auf ihre Grösse, noch auf die Materie, woraus sie bestehen, sondern blos auf die Verhältnis der

Kraft und Last, oder ihrer Geschwindigkeiten gesehen. Ferner werden alle Teile derselben ganz volkommen zu sein angenommen, d. i. man stellet sich daran vor, als ob sie keine Schwere und Rauhigkeit, sondern ihre Figur auf das volkomste hätten; als ob dieienige welche vermög Erfordernis unbiegsam sein solten, volkommen steif, und die Biegsamen volkommen biegsam wären. u. s. w. Da aber in der würklichen Ausübung keine Machine in solcher Volkommenheit teils wegen der Beschaffenheit der Materialien oder Bestandteilen, teils auch wegen vielen andern Hindernissen hergestellet werden kan, so ist es auch kein Wunder, wenn man die theoretische Berechnungen der Machinen mit der würklichen Erfahrung niemals genau übereinstimmen findet. Indessen, wenn man von der Würkung einer Machine doch in etwas gewis sein, und dieselbe nicht auf ein blosses gerade wohl ankommen lassen will, so ist es doch nöthig, dieselben aus diesem Gesichtspunkte zu betrachten, und die Grösse der Abweichung von der theoretischen Bestimmung nur durch Näherung zu suchen.

Von dem Hebel.

Was ein Hebel überhaupt sei, ist bereits §. 171. erkläret worden.

Erklärung.

§. 211. Nach den verschiedenen Stellungen der Kraft und Last in Ansehung des Ruhepunkts erhält der Hebel andere Benennungen, und zwar wenn die Kraft und Last an den äussersten Enden desselben, der

Ruhepunkt aber irgendwo zwischen ihnen angebracht, ist, so wird er ein Hebel der ersten Art, oder ein Druckhebel (Vectis Heterodromus) genent. Ist aber der Ruhepunkt und die Kraft an seinen äussern Enden, und die Last in der Mitte, so heist er ein Hebel der zwoten Art, oder ein Traghebel (Vectis Homodromus) und endlich, wenn der Ruhepunkt und die Last an beiden Enden, die Kraft aber in der Mitte angebracht ist, so ist es ein Hebel der dritten Art, oder ein Werfhebel. Besteht der Hebel aus keiner geraden sondern aus einer auf was immer für Art gekrümt oder gebrochenen Linie, so wird er auch ein gebrochener Hebel genent.

Fig. 62. 63 u. 64. So ist z. B. fig. 62. ein Hebel der ersten, fig. 63. der zwoten, und fig. 64. der dritten Art, wenn wir in ieden A als die Last, B als die Kraft, und C als den Ruhepunkt annehmen

Fig. 65. u. 66. fig. 65. und 66 aber sind gebrochene Hebel.

Erklärung.

§. 212. Diejenigen Teile des Hebels, da von einer von dem Ruhepunkt bis zur Last, und der andere von eben diesem bis zur Kraft reichet, werden die Hebelsarme genent, sie mögen demnach krum oder gerad sein, oder mit einander einen Winkel machen.

So sind in den fig. 62 bis 66 AC und BC die Hebelsarme.

Erklärung.

§. 213. Die Richtungen der Kraft und Last sind jene gerade Linien, nach welchen dieselbe ihre Würkungen ausüben.

So

So sind z. B. in den fig. 67. 68. 69. 70. FB und EA die Richtungslinien der Kraft und Last, die verschiedene Stellungen haben können. Fig. 67. 68. 69. und 70.

Erklärung.

§. 214. Die Abstände der Kraft und Last von dem Ruhepunkt sind iene Linien, so man sich aus dem Ruhepunkt auf die Richtungslinien der Kraft und Last perpendikular gezogen zu sein einzubilden hat.

So ist z. B. in den fig. 67. 68. 69. 70. Cb der Abstand der Kraft, und Ca der Abstand der Last.

Zusaz.

§. 215. Es ist also klar, daß, wenn der Hebel eine gerade Linie ist, und die Kraft und Last würken perpendikular in dieselbe, die Hebelsarme selbst die Abstände der Kraft und Last von ihrem Ruhepunkte sein müssen, wie fig. 62. 63. 64. zu sehen.

Lehrsaz.

§. 216. Wenn die an einem geraden unbiegsamen und ohne Schwere betrachten Hebel angebrachte und perpendikular auf demselben würkende Kraft und Last im Gleichgewicht sind, so stehen sie mit ihren Abständen von dem Ruhepunkt, oder mit den Hebelsarmen selbst in verkehrter Verhältnis. Der Hebel mag von der ersten zwoten, oder dritten Art sein.

Beweis: Wenn man die an den drei Hebelsarten angebrachte und perpendikular auf dieselben würkende Kraft B als eine Last oder Gewicht betrachtet, und mit M, die würkliche Last A aber mit m benennet, und sich vorstellet, daß, wenn der Hebel um seinen Fig. 62. 63 u. 64.

Ruhepunkt bewegt würde, die Kraft B in der nehmlichen Zeit den Bogen BD beschreiben müste, als die Last den Bogen AE beschriebe. Derowegen kan man diese verschiedene Geschwindigkeiten der Kraft und Last durch die Bögen BD und AE nach §. 27, oder auch, weil der Winkel BCD = ACE, folglich die Bögen BD und AE einander ähnlich sind, durch die Radien oder Abstände BC und AC ausdrücken. Nun aber ist das Bemühen der Kraft und Last nach der Bedingung gleich. D. i. $M \times BC = m \times AC$. Also wenn man diese Gleichung in eine Proportion auflöset, so ist $M : m = AC : BC$. §. 30. D. i. wenn die Kraft und Last im Gleichgewicht sind, so stehen sie mit ihren Abständen von dem Ruhepunkt in verkehrter Verhältnis.

Zusaz.

§. 217. Wenn also umgekehrt die Abstände mit der Kraft und Last in verkehrter Verhältnis stehen, so sind Kraft und Last im Gleichgewichte.

Zusaz.

§. 218. Wenn demnach aus obiger Proportion $M : m = AC : BC$, was immer für drei Säze bekant sind, so kan man leicht den vierten finden, oder auch wenn die Kraft und Last samt ihrer Entfernung von einander gegeben sind, so kan man nach §. 182. den Ruhepunkt C finden, in welchen, wenn der Hebel aufgehangen oder unterstüzet wird, beide im Gleichgewichte stehen. D. i. man kan allezeit die Kraft finden, welche nöthig ist, einen an einem gewissen Hebel angebrachten Last das Gleichgewicht zu halten, oder umgekehrt.

Zusaz.

§. 219. Da die Abstände der Kraft und Last von dem Ruhepunkt Radien der ähnlichen Bögen BD und AE welche die Kraft und Last in gleicher Zeit beschreiben, sind, und sich die ähnliche Bögen wie ihre Radien verhalten §. 148. Geomet. so kan man nach vorhergehenden Lehrsatz auch sagen, daß sich an einem jeden Hebel die Kraft zu der mit ihr im Gleichgewicht stehenden Last wie der Bogen welchen die Last beschreibet, zu den Bogen welchen die Kraft beschreibet, verhalte. Da ferner durch diese Bögen die Geschwindigkeiten der Kraft und Last ausgedrückt werden, so folget auch, daß sich die Kraft und Last wie umgekehrt ihre Geschwindigkeiten verhalten. Fig. 62. 63. 64.

Zusaz.

§. 220. Aus allen diesen erhellet, daß man durch einen Hebel der ersten und zwoten Art mit einer kleinern Kraft eine grössere Last bewegen könne, wenn man nehmlich die erste weiter vom Ruhepunkt als die andere anbringet. Bei der dritten Art aber mus die Kraft allezeit grösser als die Last sein, weil sie vermög der Eigenschaft dieses Hebels allemal näher am Ruhepunkt als die Last sein mus. Unterdessen, obwohl man bei diesem Hebel nichts an der Kraft gewinnet, so kan er doch in gewissen Fällen mit Nutzen gebraucht werden. Z. B. wenn man überflüssige Kraft hat, und nur an der Zeit gewinnen will, oder wenn man ausdrücklich an Ort und Stelle gebunden ist. u. d. gl. m.

Zusaz.

§. 221. Hätte aber der Hebel eine Schwere, und dessen Arme wären ungleich lang, so würde der §. 216. erwiesene Lehrsatz nicht mehr staat haben, bis nicht die

ungleiche Schwere der Hebelsarme als eine noch besonders hinzukommende Kraft und Last mit in die Betrachtung genommen wird, welches am füglichsten geschihet, wenn man die ungleiche Schwere der Arme durch Anhängung eines Gewichtes zuvor in das Gleichgewicht zubringen suchet, und alsdenn dasselbe mit in die Rechnung nimt.

Zusatz.

§. 222. Ferner ist klar, daß wenn eine geringere Kraft einer grössern Last an einem Hebel das Gleichgewicht halten soll, die erstere allemal um so weiter von dem Ruhepunkt angebracht werden müsse, als sie kleiner als die andere ist.

Zusatz.

§. 223. Wenn die Last schneller als die Kraft bewegt werden soll, so mus die erstere weiter von dem Ruhepunkt entfernet sein als die andere, diese aber mehr Vermögen haben, oder umgekehrt.

Ubrigens erhellet von selbsten, daß die Schall oder Schnelwagen, Scheeren, Zangen, Schneidmesser u. m. d. gl. nichts anders als verschiedene Hebelsarten sind, deren Arme nach Erfordernis bald länger bald kürzer gemacht werden. Besonders werden den Anfängern die nähere Beschaffenheit der erstern, und die Untersuchung ihrer Fehler werkthätig gezeiget werden.

Lehrsatz.

§. 224. Wenn die Kraft und Last an einem Hebel der ersten Art im Gleichgewichte sind, und schief in ihn würken, so verhält sich ebenfals die erste zur an-

andern wie umgekehrt ihre Abstände von dem Ruhepunkt, und umgekehrt.

Beweis: Verlängert die schiefen Richtungslinien FB und EA bis sie in einen Punkt D zusammen laufen; ziehet durch C und D eine gerade Linie DG, und aus einen auf der Linie DE beliebigen Punkt A eine Parallel AG zu DB; vollendet das Parallelogram DAGI gänzlich, indem ihr noch aus dem Durchschnitspunkt G eine Parallel GI zu DA führet, und betrachtet dabei, daß, weil die Kraft nach der Richtung DB, die Last aber nach DA würket, und der Ruhepunkt C diesen beiden nach der Richtung CD eben so viel widerstehet, als beide zusammen würken, man diese drei Kräfte durch die Seiten des Parallelograms und zwar die eigentliche Kraft durch DI, die Last durch DA, und den Widerstand, welchen der Ruhepunkt leistet, durch die Diagonal DG vorstellen, und folglich DI und DA als zwo zusammengesetzte Kräften, welchen die einfache DC gleich ist, ansehen könne. Nun aber verhält sich bei zusammengesetzten Kräften iede einfache zu der andern wie die Sinusse der Winkel, so sie mit der Diagonal machen wechselweis §. 41. D. i. wenn man DC als den Sinus totus annimt, und Cb auf DB, Ca aber auf DA perpendikular führet, so sind sie die Sinusse der Winkel BDC und ADC und es ist Fig. 67. 68.

$$DI : DA = Ca : Cb.$$

Cb und Ca aber sind zugleich die Abstände der Kraft und Last von ihrem Ruhepunkt, also wenn die Kraft und Last an einen Hebel der ersten Art im Gleichgewicht und ihre Würkungen schief sind, so verhalten sie sich wie ihre Abstände von dem Ruhepunkt wechselweis, und umgekehrt.

Zusatz.

Fig. 69. 70. §. 225. Eben was wir in vorigen Lehrsatz von dem Hebel der ersten Art erwiesen haben, hat nicht weniger seine Beziehung auf den Hebel der zwoten und dritten Art; denn, wenn man mit den drei Kräften das Parallelogram DCGI sich wieder vorstellet, und die Perpendikularen Cb und Ca auf DB und DA ziehet, welche zugleich die Sinusse der Winkel BDC und GDC sind, so ist abermal die Kraft B zur Last A wie wechselweise Ca zu Cb.

Zusatz.

Fig. 71. §. 226. Wären die Richtungen BF und AE der Kraft und Last zwar schief, aber unter sich parallel, so hat man sich den Punkt ihres Zusammenlaufes unendlich weit entfernt, und folglich die Winkel an denselben davon Ca und Cb die Sinusse vorstellen, als unendlich klein einzubilden. Derowegen ist nicht minder im solchen Falle die Kraft B zur last A, wie umgekehrt Ca zu Cb.

Zusatz.

§. 227. Man kan also von allen Hebelsarten, sie mögen gerade oder krum sein, und die Kraft und Last mag schief oder perpendikular in denselben würken, überhaupt sagen, daß, wenn die Kraft und Last einander das Gleichgewicht halten sollen, sich dieselben wechselweise wie die perpendikular Abstände der Richtungslinien von dem Ruhepunkt verhalten müssen.

Ubrigens ist aus den bisher angeführten leicht einzusehen, daß, wenn die Richtungen der Kraft und Last schief sind, dieselben ihr würkliches Vermögen um so weniger ausüben können, ie schiefer

sie

sie sind. Wenn man also durch was immer für einen Hebel mit einer möglichst kleinen Kraft eine Last bewegen sol, so hat man zu sorgen, daß dieselbe soviel möglich perpendikular in den Hebel würken könne.

Von dem Rad an der Welle.

Erklärung.

§. 228. Wenn sich eine Kraft in einem Kreis beweget, und einen Cylinder, daran die Last angebracht ist, mit sich herum drähet, so wird diese Machine ein **Rad an der Welle** (Axis in peritrochio) genent.

Zusatz.

§. 229. Der Cylinder an welchen die Last angebracht, oder gemeiniglich an einen Stricke aufgewunden wird, heist die **Welle**, und iene Punkten O, P, in welchen die Welle auflieget, und sich daran herumdrähet, werden die **Lagerzapfen** genent. Die gerade Linie OP aber, welche sie durch die Länge des Cylinders verbindet, ist die **Achse**. Fig. 72.

Zusatz.

§. 230. Die Kraft wird entweder an einige durch die Welle gesteckte Sprossen CI, IF als Radien, oder an eine so genante **Kurbel** DE, oder aber an dem Umkreise eines würklichen Rades verschiedentlich angebracht.

Lehrsatz.

§. 231. Wenn an einem Rad an der Welle die Kraft und Last im Gleichgewicht stehen solle, so müssen sie sich gegeneinander wie umgekehrt der Radius der Welle zum Radius des Rades verhalten.

Fig. 73. Beweis: Verlängert die Richtungslinien EB und FA der Kraft und Last, bis sie, wenn sie nicht parallel sind, in einen Punkt D zusammenlaufen; ziehet aus dem Lagerzapfen oder Ruhepunkt C die Perpendikularen CB und CA auf die Richtungen, so sind sie die Abstände der Kraft und Last von ihrem Ruhepunkt §. 214. oder man kan sie als die Arme eines Hebels ansehen. Und derowegen ist:

$$B : A = AC : BC.$$

D. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie umgekehrt der Radius der Welle zum Radius des Rades.

Zusaz.

§. 232. Es wird in vorigen Lehrsaz eigentlich erfordert, daß die Richtung EB der Kräft eine Tangent zum Umkreis des Rades sei; denn widrigenfals, d. i. wenn sie z. B. nach BL gerichtet wäre, so würde der Abstand der Kraft nicht CB sondern vielmehr CL sein, und man würde sezen müssen:

$$B : A = AC : CL.$$

D. i. der Radius des Rades würde kürzer werden, oder die Kraft im solchen Falle nicht ihr ganzes Vermögen in die Last ausüben können, ia sie würde dasselbe gänzlich verlieren, wenn sie nach der Richtung OC oder PO würken müste. Es ereignet sich dieses sonderlich öfters bei Kurbeln, wenn an denselben der Kraft keine gute Richtung gegeben wird.

Zusaz.

§. 233. Weil die Abstände der Kraft und Last eigentlich Radien des Rades und der Welle sind, wenn anders die Richtungen Tangenten sind, und die Radien sich wie ihre Umkreise verhalten, also verhalt sich auch an dem Rad an der Welle die Kraft zur Last, wie der Umkreis der Welle zum Umkreise des Rades.

Zu-

Zusaz.

§. 234. Man kan also das Rad an der Welle mit Recht als einen ewigen Hebel ansehen, und zwar als einen Hebel der ersten Art, wenn die Kraft und Last sich auf beiden Seiten des Ruhepunkts befinden, und als einen der zwoten, wenn sowohl Kraft als Last nur auf einer Seite desselben würken.

Ubrigens ist das Rad an der Welle vorzüglich zu gebrauchen, wenn grosse Läste auf grössere Höhen aufgezogen, oder auf horizontalen oder schiefen Flächen herbei gebracht werden sollen, oder wenn immer ein oftmaliges Umdrähen an einer Machine erfordert wird. Die Welle wird hiebei nach Erfordernis der Umstände bald horizontal, bald vertikal gestellet. Im ersten Falle wird sie überhaupt ein Haspel, im andern aber ein Brustzug genent. Eben so sind Zähnräder, Trettråder, Wasserråder, oder wenn man Pferde um eine Welle zu treiben im Zirkel herum gehen låst, unter eben diese Gatung Machinen zu zählen, oder als Räder an der Welle anzusehen.

Von der Flaschenscheibe.

§. 235. Wenn eine Scheibe durch einen an ihren Umkreis in einer ausgehölten Nuth hinlaufenden Strick oder Schnur um ihren Mittelpunkt bewegt wird, so heist sie eine Flaschenscheibe.

Zusaz.

§. 236. Verbleibt der Mittelpunkt der Scheibe beim Umdrähen immer an seinen nehmlichen Orte stehen, so ist es eine unbewegliche; verändert aber der-

selbe

selbe seine Stelle, und bewegt sich zugleich mit der angehangenen Last, so wird sie eine bewegliche Flaschenscheibe genent.

Zusatz.

§. 237. Oefters wird die Flaschenscheibe in ihren Mittelpunkte mit einem runden Loche versehen, durch welches eine Achse gesteckt wird, um die sie sich ungehindert bewegen kan; öfters aber wird auch die Achse an die Flaschenscheiben selbst fest gemacht, und bewegt sich mit samt derselben in runden Löchern, welche ihr zur Auflage dienen.

Lehrsatz.

§. 238. In der unbeweglichen Flaschenscheibe mus die Kraft soviel Vermögen als die Last haben, wenn sie ihr das Gleichgewicht halten soll.

Beweis: Wenn über eine unbewegliche Flaschen-
Fig. 74. scheibe einen Strick oder Schnur gelegt, und an dessen einem Ende P eine Last, an das andere Q aber eine Kraft angebracht wird, so kan man BA als einen Hebel der ersten Art, dessen Ruhepunkt in C, die Last in A und die Kraft in B ist betrachten. Nun aber sind die Abstände BC und AC der Kraft und Last von ihrem Ruhepunkte Radien der Flaschenscheibe, derowegen ist Q : P = CA : CB. §. 224. Weil aber CA = CB so ist nothwendig auch Q = P. D. i. in der beweglichen Flaschenscheibe mus das Vermögen der Kraft und Last gleich sein, wenn sie im Gleichgewicht stehen sollen.

Zusatz.

Fig. 75. §. 239. Wenn auch die Richtungslinien QD und PD der Kraft und Last nicht parallel laufen, so verblei-

bleiben die perpendikular Abstände CB und CA der Kraft und Last doch immer den Radien der Scheibe und also auch unter sich gleich; folglich muß die Kraft an einer unbeweglichen Flaschenscheibe auch bei schiefen Richtungen eben so viel Vermögen als die Last haben, um ihr das Gleichgewicht zu halten.

Zusaz.

§. 240. Nicht weniger folget, daß die Kraft und Last an einer unbeweglichen Flaschenscheiben gleiche Räume durchlaufen, folglich gleiche Geschwindigkeiten haben.

Zusaz.

§. 241. Es wird also bei einer unbeweglichen Flaschenscheiben an der Kraft eigentlich nichts gewonnen; iedoch giebt sie den öfters sehr wesentlichen Vorteil, daß man die Richtungen sowohl der Kraft als der Last nach Belieben verändern könne.

Lehrsaz.

§. 242. Wenn die Kraft und Last an einer beweglichen Flaschenscheibe im Gleichgewichte stehen sollen, so müssen sie sich wie umgekehrt die perpendikulär Abstände ihrer Richtungslinien von dem Ruhepunkt verhalten.

Beweis: Wenn man das Ende eines Strickes oder einer Schnure an einen unbeweglichen Punkt T befestiget, denselben um eine bewegliche Flaschenscheiben, an welche eine Last P angebracht ist, leget; an das andere Ende Q aber eine Kraft anwendet, welche die Last samt der Flaschenscheibe durch die Anspannung des Strickes zu bewegen suchet, so kan man die Linie BC, so durch die Punkten B und C, in welchen die Rich- Fig. 76.

tungslinien PQ und PT sich als Tangenten von der Flaschenscheibe entfernen, als einen Hebel der zwoten Art, an dem C der Ruhepunkt, L der Ort der Last, und B der Kraft ist, ansehen. Ziehet man nun CE perpendikular auf QP, und CL auf GP, als auf die Richtungslinien der Kraft und Last,

so ist Q : P = CL : CE. §. 216.

D. i. wenn die Kraft und Last an einer beweglichen Flaschenscheiben im Gleichgewicht sein sol, so müssen sie sich wie umgekehrt die perpendikular Abstände ihrer Richtungslinien von dem Ruhepunkt verhalten.

Zusaz.

§. 243. Ziehet man noch die Linie BG und CG nach dem Mittelpunkt der Flaschenscheiben, so ist das Dreieck BLG = CLG, weil BG und CG Radien, und ihre Winkel in L = 90° sind. Da ferner GB und CE perpendikular auf QP stehen, so sind sie unter sich parallel, und der Winkel GBL ist = BCE, weil ferner der Winkel BLG = BEC = 90° ist, so sind die zwei Dreiecke BEC und BLG oder auch CLG einander ähnlich, und derowegen ist:

BL oder CL : CE = BG oder CG : BC.

Weil aber gleich oben erwiesen worden; daß Q : P = CL : CE, so ist auch Q : P = BG oder CG : BC. D. i. an einer beweglichen Flaschenscheiben verhält sich auch die Kraft zur Last, wie der Radius der Scheibe zur Sehne, die von einem Berührungspunkt der Richtungslinien zum andern gezogen wird.

Zusaz.

Fig. 77. §. 244. Sind die Richtungslinien BQ und LP der Kraft und Last unter sich parallel, so wird BC nothwendig dem Durchmesser, und CL dem Radius der

Schei-

Scheibe selbst gleich, und es ist abermal Q : P = CL : BC. D. i. Wenn in einer beweglichen Flaschenscheiben die Richtungen der Kraft und Last parallel sind, so mus sich die Kraft zur Last wie 1 : 2 verhalten, wenn sie im Gleichgewicht stehen sollen. Daraus ist also zu schliessen, daß man an einer beweglichen Flaschenscheiben am meisten an der Kraft gewinne, wenn man die Richtungen der Kraft und Last parallel einrichtet.

Zusatz.

§. 245. Ferner folget nicht minder, daß so wie man bei der beweglichen Flaschenscheiben an der Kraft gewinnet, dieselbe auch eine um so grössere Geschwindigkeit als die Last haben müsse, d. i. bei schiefen Richtungen verhält sich die Geschwindigkeit der Kraft zu den der Last, wie BC : CG oder wie die Sehne zum Radius, und bei parallelen wie der Durchmesser der Scheibe zu ihren Radius.

Von der schiefliegenden Fläche.

Lehrsatz.

§. 246. Wenn eine Last P durch eine Kraft Q auf einer schiefliegenden Fläche EG gehalten werden, oder mit ihr im Gleichgewicht stehen sol, und die Richtung AH der Kraft ist mit der schiefliegenden Fläche parallel, so mus sich die Kraft zur Last wie die Höhe FG der schiefliegenden Fläche zu ihrer Länge EG verhalten. Fig. 78.

Beweis: Ziehet aus den Schwerpunkt A der Last die Linie AC perpendikular auf EG, so wird C der Ruhepunkt sein, in welchem die Last die schiefe Fläche

berühret, oder aufruhet, und AC ist der Abstand der Richtungslinie AH der Kraft von dem Ruhepunkt. Lasset ferner aus A eine Perpendikular AI auf die Horizontale Grundfläche EF fallen, so wird dieselbe die Richtung der Last anzeigen, nach welcher sie vermög ihrer Schwere frei fallen würde. Ziehet ihr nun noch DC perpendikular auf AI, so wird solche euch den Abstand der Richtungslinie der Last von dem Ruhepunkt anzeigen, und ihr werdet DC und AC als die Aerme eines gebrochenen Helbels, an dessen einen Ende D die Last, und an dem andern A die Kraft angebracht, C aber der Ruhepunkt desselben ist, ansehen können, und in diesen ist nun Q : P = DC : AC. §. 224. Da nun das Dreieck ABC rechtwinkelicht, und DC perpendikular auf dessen Hypothenuse AB gemacht worden ist, so sind die zwei Dreiecke ADC und CDB einander ähnlich §. 152. Geomet. und weil der Winkel DBC = EBI und EIB = 90°, so ist auch das Dreieck EIB oder EFG ∽ ADC oder CDB, folglich ist auch: DC : AC = BI : EB : FG : GE und also Q : P = FG : GE. D. i. die Kraft verhält sich zur Last wie die Höhe der schiefliegenden Fläche zu ihrer Länge.

Zusatz.

§. 247. Da wegen der Aehnlichkeit der Dreiecken ADC und EFG der Winkel DAC = GEF, und man AC als den Sinus totus, DC aber als den Sinus des Winkels DAC ansehen kan, und nach §. 246. Q : P = DC : AC = FG : EG ist, so ist auch Q : P = Sin DAC oder GEF : Sin tot. D. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie der Sinus des Erhöhungswinkel der schiefliegenden Fläche zum Sinus totus.

Zu-

Zusatz.

§. 248. Ist die Richtung AH der Kraft nicht mit der schiefen Fläche EG sondern mit ihrer Grundfläche EF parallel, so ziehet abermal DC perpendikular auf die Richtungslinie AI, der Last, und CX perpendikular auf die Richtungslinie AH der Kraft, so ist wiederum: Fig. 79.

$$Q : P = DC : CX. \text{ §. } 224.$$

D. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie der Abstand der Richtungslinie der Last zum Abstand der Richtungslinie der Kraft von dem Ruhepunkt. Weil ferner AD = CX, so ist auch Q : P = DC : AD und da die Dreiecke ADC und EFG ebenfals einander ähnlich sind, so ist auch:

$$Q : P = FG : EF.$$

D. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie die Höhe der schiefliegenden Fläche zu ihrer horizontalen Grundlinie.

Zusatz.

§. 249. Siehet man EF als den Sinus totus an, so ist FG die Tangent des Winkels E, und man kan sagen, daß wenn eine Last auf einer schiefliegenden Fläche durch eine Kraft, deren Richtung mit der horizontalen Grundfläche EF parallel ist, im Gleichgewicht gehalten werden sol, sich die Kraft zur Last wie die Tangent des Winkels der schiefen Fläche zum Sinus totus verhalten müsse.

Zusatz.

§. 250. Machet die Richtungslinie OH der Kraft mit der schiefen Fläche entweder auf oder abwärts einen Winkel wie HOE oder HOG, so ziehet abermal DC und CX perpendikular auf die Richtungslinien AI und Fig. 80. u. 81.

OH der Last und Kraft, so ist wiederum Q : P = DC : CX. §. 224. Da ferner das Dreieck ACO rechtwinkelicht ist, so ist der Winkel CAO das Komplement von dem Winkel AOC, dessen Sinus aber CX, und DC ist der Sinus des Winkels DAC=CEI, von beiden aber AC der Sinus totus, folglich ist auch Q : P = Sin CEI : Kosinus des Winkels COA. D. i. wenn eine Kraft und Last auf einer schiefliegenden Fläche einander das Gleichgewicht halten sollen, und die Richtungslinie der Kraft macht mit der schiefen Fläche einen Winkel auf oder abwärts, so mus sich die Kraft zur Last wie der Sinus des Winkels der schiefen Fläche zum Kosinus des Winkels, den die Richtungslinie der Kraft mit der schiefen Fläche machet, verhalten.

Zusaz.

§. 251. Aus dem vorhergehenden Lehrsaz und daraus gezogenen Zusäzen folget also, daß eine Last auf einer nehmlichen schiefliegenden Fläche durch eine Kraft, deren Richtung mit der schiefen Fläche parallel lauft, am leichtesten im Gleichgewicht erhalten werde; oder daß bei ieder andern Richtung als der besagten eine grössere Kraft erfordert werde, um die Last im Gleichgewicht zu erhalten.

Wenn demnach ein Lastwaggen durch Pferde über einen Berg gezogen werden soll, so werden dieselben die wenigste Kraft anzuwenden haben, wenn sie dergestalt angespannet werden, daß die Zugstränge mit der schiefen Fläche des Bergs parallel laufen.

Obwohl man in den Figuren zur Erweisung des Gleichgewichtes der Kraft und Last auf einer schief-

schiefliegenden Fläche runde oder kugelförmige Körper für die Last angenommen hat, so ist nichts destoweniger das nehmliche auch von Körpern von einer ieden andern Figur zu verstehen. Nur wird eine stärkere Reibung bei denselben, weil sie in mehreren Punkten auf der Fläche aufliegen, entstehen, und daher zur blossen Erhaltung der Last eine mindere, und zur würklichen Bewegung eine grössere Kraft erfordert werden. Davon aber das mehrere noch an seinen Orte vorkommen wird.

Von dem Keil.

Erklärung.

§. 252. Ein Körper, der was immer für eine schneidende oder spitzige Gestalt hat, und gebraucht wird, zween andere auseinander zu trennen, oder einen allein entzwei zu teilen, zu spalten, zu durchbohren, oder ihn durch Unterschiebung auf eine kleine Höhe zu erheben, wird ein Keil genent.

Unter diese Art einfache Machinen gehören erstlich alle würklich so genante Keile, deren man sich insgemein zum Holz oder andere Körper zu spalten bedienet; dann auch noch alle Nägel, Meissel, Pfrieme, Nadeln, Lanzen, Pfeile, Messer, Degen, Säbel, Axen, u. m. d. gl. nicht minder kan man die Gewölbsteine als Keile ansehen, die gegen einander und auf die Widerlager des Gewölbs drucken.

Man hat schon lange wahrgenommen, daß die Würkung des Keils nicht in allen Fällen auf einerlei Art betrachtet werden könne. Solche zeigt sich nehmlich anders, wenn der Keil angewendet

wird zween nicht würklich zusammenhangende Körper auseinander zu treiben, oder einen davon in die Höhe zu heben; und wieder anders, wenn er einen würklich zusammenhangenden z. B. ein Stückholz zu spalten dienen soll. Allein im lezteren Falle ist bisher noch keine ganz genaue Bestimmung von der Grösse der Würkung des Keiles entdeckt worden, weil es nicht wohl möglich ist, die Stärke des Zusammenhanges eines zu zerspaltenden Körpers in allen Fällen genau zu bestimmen. Indessen werden wir dasienige anführen, was bisher von der Bestimmung der Kräften des Keiles in beiden Fällen bekant ist.

Lehrsaz.

Fig. 82. §. 253. Wenn ein Keil ABC zween nicht aneinander hangende Körper E und H auseinander zu treiben angewendet wird, so mus sich die Kraft desselben zum Widerstand, welchen beide Körper gegen ihn ausüben, wie die Grundlinie oder Breite AB des Keils zu seiner Länge DC verhalten; wenn beide einander das Gleichgewicht halten sollen.

Beweis: Ziehet ET und HT durch die Berührungspunkten R und S perpendikular auf AC und BC EH durch die Schwerpunkten beider Körper; und FG durch T, aber beide parallel zu AB, und endlich noch FE und GH parallel zu DC; so kan man TF und TG als den Abstand der Kraft, und FE und GH als den Abstand der Last oder des Widerstands zu beiden Seiten von den Ruhepunkten F und G ansehen, und EFT und HGT als zween gebrochene Hebel betrachten, an welchen die Kraft des Keiles in T, der Widerstand der beiden Körper gegen die Seiten des Keils aber in E und H angebracht wäre. Damit aber

die

die Kraft und Last an einen solchen Hebel im Gleichgewicht stehen, so mus die erste sich zur zweiten wie FF zu FT oder wie HG zu GT verhalten §. 227. Weil aber hier nur eine Kraft in zween Hebel würket, so ist klar, daß sich dieselbe zu beiden Lästen wie EF + HG zu FT oder GT verhalte. Um nun noch zu erweisen, daß auch die Kraft zu beiden Lästen wie AB zu DC ist, so betrachtet, daß die Dreiecke CRT und CDA rechtwinkelicht sind, und in C einen gemeinschaftlichen Winkel haben, folglich ist auch der Winkel CTR = CAD §. 140. Geom. und die Dreiecke sind einander ähnlich. Ferner betrachtet, daß, weil das Dreieck ITC rechtwinkelicht, und TR perpendikular auf IC ist, die Dreiecke IRT und TRC ähnlich sein müssen, §. 152. Geomet.; daher ist auch der Winkel ITR = ICT. Endlich da das Dreiecke EFT rechtwinkelicht, und der Winkel FTE = ACD ist, so ist auch der dritte FET = DAC, und folglich sind auch die Dreiecke EFT und ADC einander ähnlich, und das nehmliche ist auf der andern Seiten von HGT zu verstehen; derowegen ist:

EF : FT = AD : DC

oder auch EF + HG : FT = AD + DB : DC.

Weil aber gleich oben erwiesen worden, daß die Kraft sich zu beiden Lästen wie EF + HG zu FT verhalte, wenn sie im Gleichgewicht stehen, also ist auch vermög letzterer Proportion klar, daß sich die Kraft eines Keils zur Last, oder dem Widerstand, welchen beide Körper gegen ihn ausüben, wie die Grundlinie oder Breite AB desselben zu seiner Länge DC verhalten müsse.

Zusatz.

§. 254. Da die Kraft sich zu einer Last, die auf einer schiefliegenden Fläche in einer zur Grundlinie pa-

rallelen Richtung gehalten wird, wie die Höhe der schiefliegenden Fläche zu ihrer horizontalen Länge verhält, so siehet man, daß der Keil in obigen Falle mit derselben gleiche Würkung habe.

Zusaz.

§. 255. Da durch die Verminderung der Linie AB, indem DC unverändert bleibt, die Verhältnis beider Linien vergrössert wird, so ist klar, daß ie schmäller oder vielmehr spitziger man einen Keil machet, ie kleiner darf die ihn treibende Kraft sein, um zween Körper auseinander zu treiben.

Die Würkung des Keiles läst sich auch durch die Geschwindigkeiten oder durch den Weg, welchen die Kraft und Last beschreiben müssen, erweisen; dann betrachtet, daß beide Körper erstlich bei dem Anfang der Würkung des Keiles sich berühren, und daß sie am Ende denselben auf eine Weite von einander getrennet werden, die der Breite AB des Keils gleich ist, und daß indessen der Keil einen Weg gemacht hat, der der Linie DC gleich ist. Nun da sich auch die Kraft zur Last wie die Geschwindigkeit der zweiten zu der ersten verhalt, so ist klar, daß die Kraft eines Keils sich zu der ihm widerstehenden Last wie AB zu DC verhalte.

Lehrsaz.

Fig. 83. §. 256. Wenn ein Keil ABC gebraucht wird, einen Körper z. B. ein Stückholz zu spalten, so mus sich die Kraft, so den Keil treibet, zur Last, oder dem Widerstand, welchen das Holz an beide Seiten des Keils ausübet, wie $AB \times IL$ zu $2AC \times GL$ verhalten, wenn beide im Gleichgewicht stehen sollen.

Vor-

Vorbereitung: Betrachtet, daß, wenn der Keil zum Holz spalten angewendet wird, dasselbe ihm zu beiden Seiten nach den Richtungslinien GE und HE, welche perpendikular auf die Seiten AC und BC sind, widerstehe; und obwohl die Berührung des Keiles und Holzes zu beiden Seiten in mehrern Punkten geschihet, so kan man sich doch einbilden, als ob dieselbe nur in den Punkten G und H vorgienge, und also der ganze Widerstand daselbst allein vereiniget wäre. Ferner, wenn die würkliche Spaltung nur noch bis in M gienge, so ist doch gewis, daß die Fibern wegen ihrer natürlichen Elasticität noch weiter hinab schon ausgedehnet, obwohl noch nicht von einander getrennet werden, folglich auch schon dem Keil widerstehen. Jedoch erstrecket sich diese Ausdehnung nur bis auf eine gewisse Weite, als etwan bis in L, so daß ML die ganze Anzahl der ausgedehnten Fibern vorstellet; weiter hinab aber wird keine Würkung des Keiles in die Fibern verspüret. Ob uns zwar die eigentliche Weite ML, auf welche die Fibern die Würkung des Keiles empfinden, nicht genug bekant, und nach der Beschaffenheit des Holzes sehr verschieden sein kan, so ist doch, um sich der Wahrheit so weit zu nähern, als in diesem Falle möglich ist, erlaubt anzunehmen, als ob zwischen M und L in einen Punkt I ein eben so starkes Band, als der ganze Widerstand der Fiebern betragt, geleget, und welches durch die Würkung des Keiles anstaat den ausgedehnten Fibern zu zerreissen wäre. Dieses also vorausgesetzt, ist klar, daß die Kraft des Keiles gegen das Band wie eine Kraft und Last, welche an zween Hebel GIL und HIL, in welchen L ihr gemeinschaftlicher Ruhepunkt, LI der gemeinschaftliche Abstand der Last, und LG und LH die Abstände der Kraft vom Ruhepunkt beider Hebeln ist, würken müsse.

Be-

Beweis: Ziehet OD und OF parallel zu GE und HE, und machet das Parallelogram ODEF vollends aus, so ist klar, daß durch die gleichen Seiten ED und EF der Widerstand des Holzes gegen dem Keil, durch EO aber die Kraft, welche der Keil haben mus, um mit besagten Widerstand im Gleichgewicht zu sein, ausgedruckt werde, oder die Kraft Q des Keils verhält sich zum Widerstand P, welchen das gespaltene Holz gegen die Seiten des Keils ausübet, wie EO zu DE + EF. Nicht minder da die noch nicht getrenten Fibern, welche in I vereiniget zu sein angenommen, und durch das Band vorgestellet werden, wie zween Hebel GIL und HIL würken, so ist wiederum: Q : P = LI : LG oder wie LI : LH. Ferner betrachtet, daß die zwei rechtwinkelichte Dreiecke CQA, und CGE einen gemeinschaftlichen Winkel in C haben, folglich ist auch der Winkel CAQ = CEG, und die Dreiecke sind einander ähnlich; und weil auch die zwei rechtwinkelichte Dreiecke CGE und DNE in E einen gemeinschaftlichen Winkel haben, so ist auch der Winkel NDE = GCE, folglich ist auch das Dreieck DNE ∽ CGE ∽ CQA, und da das Dreieck CQA = CQB, und DNE = DNC = FNE = FNC ist, so ist auch ODE = OFE ∽ ACB; daher kan man anstaat der vorigen Proportion setzen: Q : P = AB : 2AC; und um den Widerstand, den die noch unzertrenten Fibern gegen den Keil ausüben, ebenfals mit in die Rechnung zu nehmen, so ist:

$$Q : P = AB \times IL : 2AC \times GL \text{ oder } HL.$$

Ubrigens erhellet von selbst, daß der Keil bei der Anwendung zum spalten eines Körpers eine aus zwoen schiefliegenden Flächen, und zween Hebeln zusammengesetzte Machine wird. Wir haben aber diesen Falle von darum hier unter den einfa-

chen

chen Machinen berühret, um von demselben, da wir von den zusammengesetzten handeln, nicht wieder besonders Meldung machen zu müssen.

Von der Schraube.

Erklärung.

§. 257. Wenn man sich einbildet, daß die Höhe eines Cylinders AD in mehrere gleiche Teile AC, CE, EG u. s. w. eingeteilet sey und auf denselben lauter rechtwinkelichte Dreiecke CAB, ECF u. s. w., von welchen iedes einen solchen Teil AC zur Höhe, den Umkreis des Cylinders aber zur Länge AB, oder CF hat, beschrieben, und alle diese Dreiecke dergestalt um den Cylinder gewunden wären, daß die Spitze B in A, F in C, und H in E u. s. w. zu stehen käme, folglich die Hypothenusen dieser Dreiecken zusammen gleichsam eine Linie ausmachten, die allezeit in der nehmlichen Schrähe um den Cylinder gehet; ferner nach dieser schrähen Linie eine Nuth wie fig. 85. an dem Cylinder AD zu sehen, dergestalt ausgehöllet wäre, daß zwischen zwoen solchen Nuthen allezeit ein eben so breiter Teil CI als die Nuth selbst ist, vom Cylinder stehen bliebe, so entstehet daraus eine Machine, die man eine Schraube nennt. Fig. 84. Fig. 85.

Zusatz.

§. 258. Wenn durch einen andern Körper XY ein Loch gebohret wird, welches mit der Dicke QS, den die ausgehölte Nuth noch übrig läst, gleichen Durchmesser ON hat, und in der Höhle desselben, so wie an der äussern Oberfläche des Cylinders, eine gleiche Nuth ausgehöllet wird, damit die Schraube durch dieselbe gedrähet werden könne, so wird dieses die

Schrau-

Schraubenmutter genent, und gehöret unmittelbar zur Schraube, wenn sie ihre Würkung machen sol.

Zusatz.

§. 259. Die Nuth so wohl an der Schraube selbst, als an ihrer Mutter wird überhaupt der Schraubengang oder das Gewinde genent; insbesondere aber heisset dasselbe ein flaches Gewinde: wenn die Nuth rechtwinkelicht ausgehöllet wird, wie in der 85. fig. und ein schneidendes: wenn sie spitzwinkelicht oder schneidend wie fig. 86. gemacht wird. Nach gut befinden bekomt sie auch zu Zeiten eine halbrunde Gestalt.

Die Schraube ist, wie bekant, eine sehr nützliche Machine, und dienet hauptsächlich entweder einen Körper sachte zu bewegen, oder zween zusammen zu pressen. Damit die Schraube bequemer und mit mehr Nachdruck in ihrer Mutter umgedrähet werden möge, bekommt solche einen Kopf mit einem Einschnit quer durch denselben, um sich beim Umdrähen eines so genanten Schraubenziehers zu bedienen, oder es wird das eine Ende, wie bei A fig. 85. zu sehen, viereckicht gemacht, um an dasselbe einen Schraubenschlüssel AP anlegen zu können, oder man machet durch den Kopf ein Loch, und stecket einen Hebel durch in der nehmlichen Absicht. Nachdem es die Umstände erfordern, wird bald die Schraube umgedrähet, da indessen die Mutter fest bleibet, bald aber sitzet die Schraube fest, und die Mutter wird bewegt; welches nicht minder durch einen Schlüssel oder Hebel geschihet.

Lehrsatz.

§. 260. Wenn eine unmittelbar an die Schraube angebrachte Kraft mit einer an eben derselben befindlichen Last im Gleichgewicht stehen sol, so mus sich die erste zur andern wie die Höhe eines Gewindes zum Umkreis des Schraubens verhalten.

Beweis: Betrachtet, daß das Gewinde einer Schraube nichts anders als ein um einen Cylinder gewundene schiefliegende Fläche sei, auf welcher die Last P bewegt wird, und wo die Richtung der Kraft Q mit der Grundlinie AB, und die Richtung der Last P mit der Höhe AC parallel ist; derowegen ist: Fig. 84.

Q : P = AC : AB. §. 248.

Es ist klar, daß die Schraube in diesem Falle nur allein als eine einfache Machine betrachtet werden könne; so bald sie oder die Mutter derselben mittelst eines Schlüsses oder Hebel, o. d. g. bewegt wird, wie fast allemal geschihet, so wird sie eine zusammengesetzte Machine, und denn hat die Kraft zur Last wieder eine andere Verhältnis, wie aus folgenden erhellet.

Lehrsatz.

§. 261. Wenn eine Schraube oder ihre Mutter mit Hülf eines Schlüssels oder Hebels bewegt wird, und die an demselben angebrachte Kraft Q mit der an der Schraube oder ihrer Mutter befindlichen Last P im Gleichgewicht stehen sol, so mus sich Q und P, wie die Höhe CI eines Gewindes zum Umkreis M, welchen die an dem Hebel AP angebrachte Kraft beim Umdrähen beschreiben mus, verhalten. Fig. 85.

Be-

Beweis: Betrachtet, daß, wenn die Kraft Q unmittelbar an die Schraube angebracht, und der Umkreis des Schraubencylinders AD = N wäre, Q : P = CI : N sein würde; da aber noch der Hebel AP dazu komt, an welchen E der Ruhepunkt, in A die Last, und in P die Kraft angebracht ist, so ist in Ansehung desselben: Q : P = AE : AP §. 216. und weil sich die Radien zweener Zirkel wie ihre Umkreise verhalten, so ist auch:

$$Q : P = N : M$$

und $Q : P = CI \times N : N \times M$

nicht minder $Q : P = \frac{CI \times N}{N} : \frac{N \times M}{N}$

folglich $Q : P = CI : M.$

D. i. die Kraft verhält sich zur Last wie die Höhe des Gewindes zum Umkreis, welchen die an dem Schraubenschlüssel oder Hebel angebrachte Kraft beschreibet.

Zusaz.

§. 262. Aus obigen Lehrsaz erhellet also, daß ie minder die Höhe des Gewindes, und ie länger der Hebel oder Schraubenschlüssel ist, um so kleiner auch die Kraft sein darf um mit der Schraube eine Last zu bewegen.

Zweites Hauptstück.

Von zusammengesezten Machinen.

Erklärung.

§. 263. Zusammengesezte Machinen werden dieienige genent, welche aus mehreren einfachen dergestalt zu-

zusammengesetzt sind, daß eine der andern ihre Würkung mitteilen, oder in Bewegung setzen könne.

Zusatz.

§. 264. Die Machinen sind entweder aus lauter einfachen von gleicher Art, d. i. entweder aus lauter Hebeln, lauter Flaschenscheiben, lauter Schrauben u. s. w. zusammengesetzt, oder sie bestehen aus einfachen Machinen von verschiedener Art, z. B. aus Hebeln, aus Flaschenscheiben, aus Rädern u. s. w.

Da die Zusammensetzung der einfachen Machinen sich sehr oft verändern läßt, so entstehen auch sehr viellerlei Gattungen von zusammengesetzten Machinen; es würde aber viel zu weitläuftig sein, sie hier auch nur grösten Teils anzuführen, wir werden vielmehr in der Folge nur von ienen handeln, welche die bekantesten und üblichsten sind, und auf welche sich die übrigen hauptsächlich beziehen. Wer von mehrerer Verschiedenheit der zusammengesetzten Machinen Nachricht haben will, der mag Leüpolds Theatrum Machinarum u. a. m. nachschlagen.

Von zusammengesetzten Hebeln.

Lehrsatz.

§. 265. Wenn mehrere Hebel dergestalt zusammengesetzt sind, daß einer in den andern würken kan, so verhält sich die an dem ersten angebrachte Kraft zu der an dem letzten befindlichen und mit ihr im Gleichgewicht stehenden Last wie das Produkt aus den einzelnen Hebelsarmen, oder Abständen der Last vom Ruhepunkt zum Produkt aus den einzelnen Hebelsarmen oder

Abständen der Kraft vom Ruhepunkt. Oder die an zusammengesetzten Hebeln angebrachte Kraft stehet mit mit der ihr das Gleichgewicht haltenden Last in zusammengesetzter umgekehrter Verhältnis, welche aus den einzelnen Verhältnissen der Hebelsarmen oder Abstände bestehet.

Fig. 87. Beweis: Betrachtet, daß in ieden einzelnen Hebel die Kraft zur Last, wie umgekehrt die Hebelsarme oder die Abstände derselben von dem Ruhepunkt sich verhalten §. 216. so daß in den Hebeln AC, DF und GI, und zwar in dem ersten $BC : AB = P' : Q'$

zweiten $EF : ED = P'' : Q''$

dritten $HI : HG = P''' : Q'''$

ferner betrachtet, daß die Ursache der Würkung des zweiten Hebels die Würkung des ersten sei; oder daß eigentlich die Last Q', welche der Kraft P' im ersten Hebel das Gleichgewicht hält, im zweiten die Kraft P'' wird, welche der Last Q'' das Gleichgewicht hält.

Da nun die Würkung des ersten Hebels $= \frac{AB \times P'}{BC}$ $= Q'$ ist, so können wir diesen gleichen Wehrt in der Proportion des zweiten Hebels anstaat der Kraft P'' setzen, so ist alsdann

$$EF : ED = \frac{AB \times P'}{BC} : Q''$$

und die Würkung des Hebels ist folglich

$$\frac{AB \times P' \times ED}{BC \times EF} = Q''.$$

Da ferner die Ursache der Würkung in den dritten Hebel ebensfals wieder die Würkung des zweiten Hebels ist; oder da die Last Q'', welche der Kraft P'' das Gleichgewicht im zweiten Hebel hält, im dritten eigentlich die Kraft P''' wird, welche die Last Q''' im

Gleich-

Gleichgewicht hält, so kan man in der Proportion des dritten Hebels anstaat P''' die Würkung des zweiten Hebels setzen, so ist:

$$HI : HG = \frac{AB \times P' \times ED}{BC \times EF} : Q'''$$

und die Würkung in diesem Hebel ist folglich:

$$\frac{AB \times P' \times ED \times HG}{BC \times EF \times HI} = Q'''.$$

Löset man nun diese Gleichung in folgende Proportion auf:

$$P' : Q''' = BC \times EF \times HI : AB \times ED \times HG$$

so siehet man klar, daß in den drei zusammengesetzten Hebel die an dem ersten angebrachte Kraft P' sich zu der an dem dritten befindlichen Last Q''' in zusammengesetztet und umgekehrter Verhältnis der Abstände der Kraft und Last von dem Ruhepunkt in ieden einzelnen Hebel befinde.

Zusatz.

§. 266. Wenn auch die zusammengesetzten Hebel von verschiedener Art sind, so ist doch aus den vorigen Grunde die am ersten angebrachte Kraft P' zu der an dem letzten befindlichen Last Q''' in zusammengesetzter umgekehrter Verhältnis der Abstände der Kraft und Last an ieden einzelnen Hebel, denn wenn z. B. der erste Hebel AC von der ersten, die andern zween DF und GI von der zwoten Art wären, so ist das Verhältnis der Kraft zur Last Fig. 88.

im ersten $CB : AB = P' : Q'$

zweiten $EF : FD = P'' : Q''$

dritten $HI : IG = P''' : Q'''$

die Würkung des ersten ist also $\frac{AB \times P'}{CB} = Q'$

die Würkung des zweiten $\frac{AB \times P' \times FD}{CB \times EF} = Q''$

und die Würkung des dritten $\frac{AB \times P' \times FD \times IG}{CB \times EF \times HI} = Q'''$

und wenn man diese Gleichung in eine Proportion auflöset:

$$CB \times EF \times HI : AB \times FD \times IG = P' : Q'''$$

Zusatz.

Fig. 87. §. 267. Da die Bögen CN, FM, LI, AO welche die Kraft und Last in gleicher Zeit an den verschiedenen Hebeln beschreiben, sich wie ihre Radien verhalten §. 148. Geomet. und §. 219., so kan man nach vorigen Lehrsaß auch sagen, daß:

$$CN \times FM \times LI : AO \times CN \times FM = P' : Q'''$$

und lasset man in dem ersten Verhältnis die gleiche Faktoren hinweg, so ist

$$LI : AO = P' : Q'''.$$

D. i. in zusammengesetzten Hebeln verhält sich die an dem ersten angebrachte Kraft zu der an dem letzten befindlichen und mit ihr im Gleichgewicht stehenden Last wie der Weg, welchen die Last in einer gewissen Zeit beschreibet, zu dem Weg, welchen die Kraft in eben dieser Zeit machen müste: oder umgekehrt wie ihre Geschwindigkeiten.

Von dem Flaschenzug.

Erklärung.

§. 268. Wenn mehrere bewegliche und unbewegliche Flaschenscheiben dergestalt zusammengesetzt werden, daß sie durch den um dieselben gewundenen Strick alle zugleich in die Bewegung gebracht werden können, so

wird diese Zusammensetzung ein Flaschenzug (Polyspastus) genent.

Da die Zusammensetzung der einzelnen Flaschenscheiben sowohl nach ihrer Anzahl, und Stellung, als auch in Ansehung der Art wie die Stricke um dieselbe gewunden werden, verschieden sein kan, so entstehen dadurch auch verschiedene Arten von Flaschenzügen, wie zum Teil aus den 89, 90, 91, 92 und 93 zu ersehen ist. Die Umstände allein können bestimmen, welche Art man sich in gewissen Fällen bedienen soll.

Lehrsatz.

§. 269. Wenn man einen Strick über eine unbewegliche Flaschenscheiben D, und um eine bewegliche A leget, an einem Ende desselben eine Kraft P anbringt, das andere aber an einem unbeweglichen Ort E befestiget, dann an den Hacken der Flaschenscheibe A das eine Ende eines andern Strickes befestiget, denselben um eine zwote Flaschenscheibe B leget, und mit dem andern Ende in F befestiget; ferner an dem Hacken der Flaschenscheibe B das eine Ende eines dritten Strickes befestiget, denselben um eine dritte Flaschenscheiben C windet, und mit dem andern Ende in G anbindet, u. s. w. iedoch dergestalt, daß alle Stricke Gg, Fd, Ea und lb parallel zu stehen kommen; an dem Hacken der letzten Flaschenscheiben aber eine Last Q''' anhanget, so mus sich die Kraft P zur Last Q''' wie das Produkt aller Radien der beweglichen Flaschenscheiben zum Produkt aller ihrer Durchmesser verhalten, wenn sie mit einander im Gleichgewicht stehen sollen. Fig. 89.

Beweis: Betrachtet, daß wenn an einer beweglichen Flaschenscheibe die Stricke mit einander parallel laufen, sich die Kraft zur Last wie der Radius der Flaschenscheibe zu seinem Durchmesser verhalte §. 244. und daß die unbeweglichen Flaschenscheiben zur Vermehrung der Kraft nichts beitragen §. 241. derowegen sind die Verhältnisse der Kraft zur Last in den einzelnen Flaschenscheiben, und zwar

$$\text{in A wie } bc : ab = P' : Q'$$
$$\text{in B wie } ef : df = P'' : Q''$$
$$\text{in C wie } hi : gh = P''' : Q'''$$

ferner betrachtet, daß die Würkung der Flaschenscheibe A $= \frac{ab \times P'}{bc} = Q'$ die Ursache der Würkung der zwoten B sei, und dieselbe gleichsam als die Kraft an B angesehen werden könne; derowegen kan man setzen

$$ef : df = \frac{ab \times P'}{bc} : Q''.$$

Ferner da die Würkung der zwoten Flaschenscheibe B $= \frac{ab \times P' \times df}{bc \times ef} = Q''$ ist, und dieselbe als die Kraft der dritten C anzusehen ist, so ist $hi : gh = \frac{ab \times P' \times df}{bc \times ef} : Q'''$, und folglich ist ihre Würkung $= \frac{ab \times P' \times df \times gh}{bc \times ef \times hi} = Q'''$. Löset man endlich diese Gleichung in folgende Proportionen auf, so ist:

$$bc \times ef \times hi : ab \times df \times gh = P' : Q'''$$

woraus also erhellet, daß sich die Kraft zur Last wie das Produkt aller Radien zum Produkt aller Durchmesser der beweglichen Flaschenscheiben verhalte.

Zusaz.

§. 270. Da sich in dieser Machine bei einer beweglichen Flaschenscheibe die Kraft zur Last wie 1 : 2, bey zwoen wie 1 : 4, bis dreien wie 1 : 8, und bei vieren wie 1 : 16, u. s. w. verhält, so ist klar, daß wenn man die Anzahl der anwesenden beweglichen Flaschenscheibe mit n benennet, allezeit die Kraft zur Last wie $1 : 2^n$ seie.

Obwohl diese Machine das Vermögen der Kraft ungemein vermehret, so ist sie dennoch im Gebrauche selbst zur Aufhebung schwerer Lasten etwas unbequem, und da der Strick Gh die ganze Last allein tragen mus, so würde er, wenn sie sehr gros wäre, auch sehr dick sein müssen, wodurch er aber auch steif und unbiegsam sein würde, als welches überhaupt in allen Arten von Flaschenzügen das Vermögen der Kraft sehr verringert. Folgende Arten von Flaschenzügen vermehren zwar das Vermögen der Kraft bei einer gleichen Anzahlscheiben nicht soviel wie die vorige, sie sind aber im Gebrauche bequemer und daher viel mehr üblich. Ihre Zusammensezung ist folgende:

Nehmlich es werden sowohl die beweglichen als unbeweglichen Scheiben in die so genanten Flaschen, die von Eisen oder Metal sind, entweder über einander wie fig. 90 und 91, oder neben einander wie fig. 92. dergestalt eingesezt, daß sich iede um ihre besondere Achse drähen kan; oder sie kommen neben einander zu stehen, und haben unten und oben, oder in einer ieden Flasche nur eine gemeinschaftliche Achse wie fig. 93. AB, und CD. Um alle diese Flaschenscheiben wird ein Strick gewunden, wie aus den Figuren erhellet,

an dessen einem Ende die Kraft P angebracht, das andere S aber wird entweder an die obere unbewegliche Flaschen wie fig. 90 und 92, oder an die untere bewegliche wie fig. 91. befestiget, und nachdem es die Umstände erfordern, kan die Kraft so gerichtet werden, daß sie entweder von oben herab wie fig. 90., oder von unten hinauf wie fig. 91. ziehet.

Die Flaschenscheiben selbst werden meistens von Metal verfertiget, und in den zwo Arten fig. 90 und 91 werden von den unbeweglichen die untern, von den beweglichen aber die obern in ihren Durchmessern immer etwas kleiner gemacht, damit die Stricke nebeneinander ungehindert vorbei können. Obwohl zwar durch diese Einrichtung die Stricke unter einander nicht gänzlich parallel werden, und folglich die beweglichen Flaschenscheiben die Kraft nicht volkommen so vermehren können, §. 243. so siehet man doch in der Ausübung nicht soviel darauf, weil es eben nicht sehr viel betragt. In der Art fig. 92 und 93, können alle Flaschenscheiben gleiche Durchmesser haben, und die Stricke dennoch parallel geführt werden. Endlich wird die Last Q in allen diesen Arten Flaschenzügen unten an die bewegliche Flaschen gehangen.

Lehrsatz.

Fig. 90. §. 271. Wenn an einem Flaschenzug der Strick dergestalt umgewunden wird, daß an einem Ende desselben die Kraft angebracht, daß andere aber an der unbeweglichen Flaschenfest gemacht wird, und die Stricke machen mit der Linie, welche die Mittelpunkten der beweglichen Flaschenscheiben beschreiben, beiderseits gleiche Winkel, so verhält sich die Kraft zu der mit ihr

im Gleichgewicht stehenden Last, wie 1 zu der Summe der Sehnen iener Bögen, welche an den beweglichen Flaschenscheiben von den Stricken umgeben werden, dividirt durch die Radien eben derselben Flaschenscheiben.

Beweis: Betrachtet, daß die unbeweglichen Flaschenscheiben zur Erhaltung der Last eigentlich nichts beitragen, sondern nur dienen dem Strick eine solche Richtung zu geben, daß er nach und nach um mehrere bewegliche Flaschenscheiben gewunden werden kan, und daß alle Teile, welche iede der beweglichen Flaschenscheiben von der ganzen Last Q zu tragen hat, zusammengenommen, derselben gleich sind, und daß alle Teile der ganzen Kraft P, welche in iede bewegliche Flaschenscheiben würket, der ganzen Kraft P gleich sei.

Man findet aber die besondere Last, welche eine iede bewegliche Flaschenscheibe zu tragen hat, indem man die besondere Kraft und Last bei der ersten mit p' und q', bei der zwoten mit p'' und q'', und bei der dritten mit p''' und q''' benent, und setzet:

für die erste $bc : ac = p' : q' = \frac{acp'}{bc}$

für die zwote $ef : df = p'' : q'' = \frac{dfp''}{ef}$

für die dritte $hi : gh = p''' : q''' = \frac{ghp'''}{hi}$

da nun $p' + p'' + p''' = P$ und $q' + q'' + q''' = Q$

so ist $Q = \left(\frac{ac}{bc} + \frac{df}{ef} + \frac{gh}{hi}\right) \times P$

und löset man diese Gleichung in folgende Proportion auf, so ist

$$P : Q = 1 : \frac{ac}{bc} + \frac{df}{ef} + \frac{gh}{hi}.$$

D. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie 1 zur Summe der Sehnen iener Bögen, die an den beweglichen Flaschenscheiben von den Stricken umgeben werden, dividirt durch ihre Radien.

Zusaz.

Fig. 92; §. 272. Sind die Stricke, welche um die beweglichen Flaschenscheiben gehen, und von der Last angezogen werden, alle untereinander parallel, so werden die Sehnen der Bögen, welche von den Stricken umgeben werden, den Durchmessern selbst gleich, derowegen verhält sich in einer ieden, die Kraft zur Last, wie der Radius zum Durchmesser. D. i.:

in der ersten $bc : 2bc = p' : q'$
in der zwoten $ef : 2ef = p'' : q''$
in der dritten $hi : 2hi = p''' : q'''$

und wann die Division würklich verrichtet, wird

$$\frac{2bc}{bc} = \frac{q'}{p'},\ \frac{2ef}{ef} = \frac{q''}{p''},\ \frac{2hi}{hi} = \frac{q'''}{p'''},$$

oder $2 = \frac{q'}{p'},\ 2 = \frac{q''}{p''},\ 2 = \frac{q'''}{p'''}$

d. i. $2 + 2 + 2 = 6 = \frac{Q}{P}$

und also $P : Q = 1 : 6$.

Daraus erhellet, daß in solchen Falle die Kraft zur Last, wie 1 zur dopelten Anzahl der beweglichen Flaschenscheiben, oder wie 1 zur Anzahl der durch die beweglichen Flaschenscheiben angespanten Stricken sich verhalte.

Uberhaupt werden meistenteils die Stricke in den Flaschenzügen, wenn sie auch nicht volkommen parallel sind, dennoch dafür angenommen, und das Verhältnis der Kraft und Last diesem Zusaz

zu folge gesucht, weil man viel kürzer davon komt, und der sich daher ergebende Unterschied nicht sehr viel betragt.

Lehrsaz.

§. 273. Wenn an einem Flaschenzug der Strick dergestalt aufgewunden wird, daß an einem Ende desselben die Kraft angebracht, daß andere aber an der beweglichen Flasche fest gemacht ist, und die Stricke machen mit den Linien welche der Mittelpunkt der beweglichen Flaschenscheiben beschreiben, beiderseits gleiche Winkel, so verhält sich die Kraft zu der mit ihr im Gleichgewicht stehenden Last, wie 1 zu der Summe der Sehnen iener Bögen, welche an den beweglichen Flaschenscheiben von den Stricken umgeben werden, dividirt durch ihre Radien, und zu der halben Sehne des Bogens, den der Strick an der untersten unbeweglichen Flaschenscheibe C umgiebt, dividiret durch ihren Radius. Fig. 91.

Beweis: Betrachtet, daß die Last Q in diesem Falle nicht allein von den um die beweglichen Flaschenscheiben gewundenen Stricken rd, Pf, uc, la, sondern auch ein Teil derselben von dem Strick mS getragen werde. Wenn man also sich einbildet, als ob an al ein Teil p''' der ganzen Kraft P von l gegen a zöge, und mit einem an mS angebrachten Teil q''' der ganzen Last Q im Gleichgewicht wäre, so wird sowohl p''' als q''' nur die Hälfte von derienigen Last sein, mit welcher die Scheibe C gedruckt wird, und man findet dieselbe, wenn man sezet:

$$ln : lm = p''' : \frac{lmp'''}{ln}$$

folglich ist der halbe Teil davon oder die Last $q''' =$

$\frac{1}{2}lmp'''$

$\frac{\frac{1}{2}lmp'''}{ln} = \frac{mop'''}{ln}$ welche der Strick mS zu tragen hat. Betrachtet ferner, daß die beweglichen Flaschenscheiben hier eben so würken, wie in dem vorigen Lehrsatz erwiesen worden, daß also hier eben alle Teile, welche iede bewegliche Flaschenscheibe von der ganzen Last Q zu tragen hat, mehr dem Teil q''', welchen der Strick mS hält, zusammengenommen derselben gleich sind, und daß alle Teile der ganzen Kraft P, welche in iede bewegliche Flaschenscheibe würken, mehr der Kraft p''', welche der Last q''' das Gleichgewicht hält, zusammengenommen derselben gleich sind, folglich, daß hier wiederum

$$\text{in der ersten } bc : ac = p' : q' = \frac{acp'}{bc}$$

$$\text{in der zwoten } ef : df = p'' : q'' = \frac{dfp''}{ef}$$

$$\text{und in C} \quad ln : mo = p''' : q''' = \frac{mop'''}{ln}$$

und das also $Q = \left(\frac{ac}{bc} + \frac{df}{ef} + \frac{mo}{ln}\right) \times P$

und diese Gleichung in folgende Proportion aufgelöst, giebt

$$P : Q = 1 : \frac{ac}{bc} + \frac{df}{ef} + \frac{mo}{ln}.$$

Daraus erhellet, daß in diesem Falle die Kraft zur Last, wie 1 zur Summe aller Sehnen der beweglichen Flaschenscheiben dividirt durch ihre Radien, und der halben Sehne des Bogens den der Strick an der Scheibe C umgiebt, dividirt durch ihren Radius sich verhalte.

Zusatz.

§. 274. Sind die Stricke, welche um die beweglichen Flaschenscheiben gehen, und von der Last angespannet werden, parallel, so werden die Sehnen der Bögen, welche an den beweglichen Flaschenscheiben von dem Strick umgeben werden, den Durchmessern derselben gleich, derowegen verhält sich in ieder die Kraft zur Last, wie der Radius zu seinen Durchmesser, daß ist also z. B. in fig. 91. Fig. 91.

in der ersten $bc : 2bc = p' : q' = \frac{2bcp'}{bc}$

in der zwoten $ef : 2ef = p'' : q'' = \frac{2efp''}{ef}$

und in der letzten unbeweglichen wie der Radius zum halben Durchmesser

$$mn : ln = p''' : q''' = \frac{lnp'''}{mn}$$

folglich ist $Q = \left(\frac{2bc}{bc} + \frac{2ef}{ef} + \frac{ln}{mn}\right) \times P$

und wenn die Division würklich verrichtet wird,

$$\frac{Q}{P} = 2 + 2 + 1 = 5$$

und also $P : Q = 1 : 5$.

Daraus also zu ersehen, daß in diesem Falle die Kraft zur Last, wie 1 zur dopelten Anzahl der beweglichen Flaschenscheiben mehr 1, oder auch wie 1 zur Anzahl der durch die beweglichen Flaschenscheiben angespanten Stricken seie.

Zusatz.

§. 275. Wenn in den Flaschenzügen wie fig. 90, 91. 92. 93 die Last sich z. B. 1 Schuh in die Höhe bewe-

beweget, so mus ieder um die beweglichen Flaschenscheiben gehender oder durch dieselben angespanter Strick sich um eben so viel verkürzen, und der Teil, woran die Kraft P befindlich, sich so vielmal verlängern als angespante Stricke vorhanden sind, folglich mus die Kraft in der nehmlichen Zeit einen um so vielmal grössern Raum als die Last beschreiben, als sie kleiner ist als diese. Daraus ist also zu schliessen, daß in diesen Flaschenzügen die Kraft zur Last wie umgekehrt ihre Geschwindigkeiten sich verhalten.

Zusatz.

Fig. 90. u. 92. §. 276. Nähme man in den Flaschenzügen fig. 90 und 92 die obere Flaschenscheiben A hinweg, und liese die Kraft an iA aufwärts ziehen, so wäre alsdenn dennoch P : Q = 1 : 6, so wie in fig. 91. noch P : Q = 1 : 5 wäre, wenn auch noch eine unbewegliche Flaschenscheibe angebracht würde, daß die Kraft abwärts ziehen müste. Läst man hingegen in fig. 92. die bewegliche Flaschenscheibe O hinweg, und befestiget den Strick ma an der untern beweglichen Flasche, so ist P : Q = 1 : 5. Uberhaupt komt es auf die Anzahl der angespanten Stricken an; wird diese geändert, so ändert sich auch das Verhältnis der Kraft zur Last.

Damit die Stricke in den Arten von Flaschenzügen fig. 90 und 91. neben einander vorbei können, und unter sich bei nahe parallel werden, so pflegt man die Durchmesser der Flaschenscheiben nach einer arithmetischen Progression einzurichten wie leicht aus den Figuren selbst zu sehen. Sehr oft werden die obern Flaschenscheiben alle neben einander an eine Achse AB fig. 93., und die untere neben einander an eine Achse CD angebracht,

und

und allen gleiche Durchmesser gegeben. Das Verhältnis der Kraft zur Last ist in dieser Art wie in den vorigen zu berechnen.

Ubrigens ist bei allen dem, was von den Flaschenzügen hier gesagt worden, weder eine Reibung noch die Unbiegsamkeit der Stricke in Betrachtung gezogen worden, beide sind öfters, und sonderlich wenn mehrere Flaschenscheiben vorhanden, so beträchtlich, daß die Kraft blos wegen diesen Hindernissen um vieles vermehret werden mus.

Von den Rädermachinen.

Erklärung.

§. 277. Wenn an dem Umkreis eines Radeszähne eingesetzt oder eingeschniten werden, in die alsdenn die Zähne eines andern Rades eingreifen, und dasselbe um ihre Achse bewegen, so wird ein dergleichen Rad ein Zahnrad genent.

Zusatz.

§. 278. Ein Zahnrad ist also an sich betrachtet nichts anderes, als ein Rad an der Welle, und die Zähne vertretten die Stelle der Sprossen.

Zusatz.

§. 279. Befinden sich die Zähne am Umkreis nach der Richtung der Radien, so heist das Rad insbesondere ein Sternrad; stehet das Rad vertikal, und die Zähne sind auf der Fläche des Rades perpendikular, so wird es ein Kammrad genent; ist aber das Rad horizontal, und die Zähne sind auf der Fläche desselben perpendikular, so ist es ein Kronrad.

Erklärung.

§. 280. Jedes Zahnrad, welches in ein anderes grösseres eingreift, wird ein Getrieb genent.

Zusaz.

§. 281. Die Getriebe haben eben nicht allezeit die Gestalt eines ordentlichen Rades, sondern erhalten gemeiniglich bei grössern Machinen anstaat der Zähne eine Anzahl so genante **Triebstecken** oder **Spindeln**, welche zwischen zwo parallel stehenden Scheiben dergestalt eingemacht werden, und so weit von einander abstehen, daß sie zwischen die Zähne des Rades, welches sie in Bewegung sezen sollen, ungehindert eingreifen können. Ein dergleichen Getrieb wird auch eine **Lanterne** genent.

Die Getriebstecken oder Spindeln werden allezeit parallel gemacht, wenn sie in ein Sternrad eingreifen, sollen dieselben aber ein Kammrad in die Bewegung sezen, so wird an dem Getriebe eine Scheibe öfters etwas grösser als die andere, so näher gegen dem Mittelpunkt des Kammrades ist, gemacht, und dadurch erhält das Getrieb die Gestalt eines abgestuzten Kegels, wodurch die Reibung, die ansonst bei einen Kammrad grösser wäre, vermindert wird.

Zusaz.

§. 282. Da die Zähne oder Getriebstecken oder Spindeln eines Getriebes in die Zwischenräume der Zähnen des Rades, so sie in Bewegung sezen sollen, eingreifen müssen, so ist erforderlich, daß ihre Dicke den Zwischenräumen der Zähnen des Rades, und diese den Zwischenräumen der Triebstecken gleich gemacht wer-

werden. Dadurch geschihet es, daß die Anzahl der Getriebstecken eines Getriebes sich zur Anzahl der Zähnen des Rades, worin sie greifen, wie der Umkreis oder Radius des einen zum Umkreis oder Radius des andern verhalte.

Bei der Einrichtung der Zähnräder und ihrer Getrieben hat man hauptsächlich zu beobachten, daß, nachdem einmal die Grösse und das Verhältnis ihrer Radien durch die Umstände bestimmet ist, man ihnen soviel Zähne und Getriebstecken gebe, als thunlich ist, ohne iedoch dieselben dadurch zu schwach zu machen, daß sie der zu verrichtenden Arbeit nicht wiederstehen könten. Die Bewegung wird an Rädern und Getrieben von mehrern Zähnen und Spindeln viel sanfter, und die Reibung gelinder als in andern von gleichen Radien aber von weniger Zähnen und Spindeln.

Weil das Getrieb sich öfter als das Rad umdrähen mus, und folglich die Spindeln öfter als die Zähne des Rades eingreifen, und sich also auch geschwinder abnutzen als diese, so pflegt man die erstern meistens von einer etwas härtern Materie und auch um etwas weniges dicker als die Zähne zu machen; und zwar pflegt man die angenommene Dicke oder den Durchmesser einer Spindel in 8 gleiche Teile zu teilen; giebt der Zwischenweite von einer Spindel zur andern 7 Teile, folglich ist von einen Mittelpunkt einer Spindel bis zum andern 15. Zur Dicke eines Zahnes nimt man 6½ zur Zwischenweite 8½, folglich ist von dem Mittel eines Zahnes bis zu dem des folgenden ebenfals wieder 15, und die Spindel hat zwischen zween Zähnen 1½ Teil zur nöthigen

Spielung. Oft werden die Spindeln und Zähne auch noch anders proportionirt.

Die Gestalt der Zähne betreffend, kan dieselbe verschieden gemacht werden; sie würden am volkomsten sein, wenn man ihr die Krümme einer gewissen Gattung krummer Linien nehmlich der Epicycloid gäbe, da aber dieses mühesam ist, so begnügt man sich in der Ausübung dem Zahne seine Dicke zu geben, und darauf noch einen halben Zirkel zu setzen, der die Dicke des Zahnes zum Durchmesser hat. Wenn aber das Getrieb, so in das Rad eingreifet, wenig Spindeln hat, so werden die Zähne etwas spitziger gemacht.

Zusatz.

§. 283. Wenn also die Dicke eines Zahnes oder einer Spindel, und ihre Anzahl einmal bestimt ist, so kan man den Umkreis und Radius des Rades oder Getriebes finden, und wenn dieser gegeben wäre, so läst sich die Anzahl der Zähne oder Spindeln von einer gewissen Dicke finden.

Der Radius eines Rades wird von dem Mittelpunkt desselben bis zu dem Mittelpunkt der Zahneslänge, oder bis zu dem Punkt, welchen die Spindeln des Getriebes an dem Zähnen berühren, und der Radius eines Getriebes von dem Mittelpunkt desselben bis zum Mittelpunkt eines seiner Getriebstecken oder Spindeln gerechnet.

Erklärung.

§. 284. Wenn mehrere Zähnräder und Getriebe dergestalt zusammengesetzt werden, daß immer ein Getrieb in ein Rad, desselben Getrieb wieder in ein anderes

deres Rad u. s. w. greifet, so wird dieses eine Rädermachine genent.

Die Rädermachinen haben ihren vortreflichen Nutzen, wenn man eine Kraft vermehren wil, und sehr grosse Lasten mit einer geringen Kraft bewegen sol; oder wenn eine Bewegung nach einen gewissen Zeitraum eingerichtet werden sol, z. B. wie die einer Uhr; oder wenn man die Geschwindigkeit vermehren sol, oder wenn man sehr kleine Bewegungen oder Räume, welche das blosse Auge nicht mehr wahrnehmen kan, merklich machen wil, z. B. wie bei dem Mikrometer.

Wenn eine Rädermachine zur Bewegung einer Last angewendet wird, so wird gemeiniglich die Bewegung des ersten Getriebes wie an einen Rade an der Welle eingerichtet, d. i. es wird entweder durch angebrachte Sprossen, durch eine Kurbel, oder durch einen um die Wellen desselben gewundenen Strick, an welchen ie Kraft angebracht wird, in Bewegung gebracht. Das lezte Rad bekomt an seine Welle kein Getriebe, sondern der Strick, an dem sich die Last befindet, windet sich an derselben auf.

Sol eine Rädermachine eine gewisse Zeit anzeigen, so bekomt die erste oder die lezte Welle einen Zeiger, welcher auf einem eigenen Zieferblat die verlangten Zeitteile andeutet.

Lehrsaz.

§. 285. In einer Rädermachine verhält sich die an dem ersten Getriebe an eine Kurbel angebrachte Kraft zu der an der lezten Welle sich aufwindenden, und mit ihr im Gleichgewicht stehenden Last, wie das Produkt aus den Radien aller Getrieben und der Welle

auf welche sich die Last windet, zum Produkt aus den Radien aller Räder und der Kurbel.

Fig. 94. Beweis: Betrachtet, daß man iedes Rad mit seinem Getriebe, welches an der nehmlichen Welle fest gemacht ist, als ein Rad an der Welle ansehen könne §. 278., und daß in demselben die Kraft zur Last, wie umgekehrt die Abstände derselben von ihrem Ruhepunkt, d. i. wie der Radius des Getriebes zum Radius des Rades sich verhalten. Wenn man also den Radius des ersten Rades A oder vielmehr der Kurbel mit e, den seines Getriebes mit a, den Radius des zweiten Rades B mit f, den seines Getriebes mit b, den Radius des dritten Rades C mit g, den seines Getriebes mit c, und den Radius des vierten Rades D mit h, und den der Welle mit d, die in die Kurbel und in iedes Rad insbesondere würkende Kraft mit P, P', P'', P''', und die an iedem Getrieb und an der letzten Welle würkende Last mit Q, Q', Q'', Q''' benennet, so ist

in dem ersten $a : e = P : Q$
zweiten $b : f = P' : Q'$
dritten $c : g = P'' : Q''$
vierten $d : h = P''' : Q'''$. §.

Ferner betrachtet, daß die Würkung des ersten Rades $= \frac{Pe}{a} = Q$ die Ursache der Würkung des zweiten seie, und daß dieselbe gleichsam als die Kraft P' angesehen werden könne; folglich ist

$$b : f = \frac{Pe}{a} : Q'.$$

Eben so ist die Würkung des zweiten $= \frac{Pef}{ab} = Q''$ als die Ursache der Würkung des dritten oder als dessen Kraft P'' anzusehen,

und

und derowegen ist $c : g = \frac{Pef}{ab} = Q''$

und endlich ist die Würkung des driteen $= \frac{Pefg}{abc} =$ Q'' als die Ursache der Würkung oder als die Kraft P''' des vierten anzusehen, und es ist $d : h = \frac{Pefg}{abc} : Q'''$

folglich ist $\frac{Pefgh}{abcd} = Q'''$.

Löset man nun die Gleichung in folgende Proportion auf, so ist

$$abcd : efgh = P : Q'''.$$

Daraus also erhellet, daß in einer Rädermachine die Kraft zur Last, wie das Produkt aus den Radien aller Getrieben und der Welle, auf welche sich die Last aufwindet, zum Produkt aus den Radien aller Räder und des Radius der Kurbel sich verhalte.

Zusatz.

§. 286. Es komt also bei einer Rädermachine auf das grössere oder kleinere Verhältnis der Radien der Getriebe und Räder, und auf die Anzahl derselben an, auf das eine Last leichter oder schwerer bewegt werde. Sind daher alle Radien derselben bekant, und die Kraft ist gegeben, so läst sich die Last, und umgekehrt wenn diese gegeben wären, die Kraft nach obigen Lehrsaß finden, welche mit der einen im Gleichgewicht stehet.

Lehrsatz.

§. 287. Wenn eine Rädermachine bewegt wird, so mus ein iedes Getrieb sich so vielmal ganz umdrähen, bis das Rad sich, worin es greifet, einmal um-

drähet, als seine Anzahl Spindeln in der Anzahl der Zähnen des Rades enthalten ist.

Beweis: Wenn das Getrieb sich einmal umdrähet, so bewegt sich das Rad, in welches dasselbe eingreifet, nur um so viele Zähne, als das Getriebspindeln enthält, um also das Rad ganz herum zu drähen, mus sich das Getrieb so oft ganz umdrähen, als die Anzahl seiner Spindeln in der Anzahl der Zähnen des Rades enthalten ist.

Zusatz.

§. 288. Aus diesem folget also, daß die Umdrähungen eines Getriebes und eines Rades darein es greifet, in umgekehrter Verhältnis der Anzahl ihrer Spindeln und Zähnen stehen; und da die Anzahl der Spindeln und Zähnen sich wie ihre Umkreise oder Radien verhalten §. 282., so verhalten sich auch die Umdrähungen eines Getriebes und Rades wie umgekehrt ihre Umkreise oder Radien; oder das Getriebe mus sich um so geschwinder oder öfter umdrähen, als dessen Anzahlspindeln oder dessen Umkreis oder Radius kleiner ist, als die Anzahl der Zähnen oder der Umkreis oder Radius des Rades.

Zusatz.

§. 289. Es kan daher die Anzahl der Umdrähungen eines Getriebes, indem sich sein Rad, worein es greifet, einmal umdrähet, allezeit durch einen uneigentlichen Bruch ausgedruckt werden, davon die Anzahl der Zähnen des Rades der Zähler, und die Anzahl der Spindeln des Getriebes der Nenner ist. Z. B. das Rad hätte 80 Zähne, und das Getrieb 10 Spindeln, so ist $\frac{80}{10} = \frac{8}{1} =$ den Umdrähungen.

Eben

Eben so låst sich die Umdråhung des Rades, indem sich sein Getrieb nur einmal umdråhet, durch einen eigentlichen Bruch vorstellen, davon die Anzahl der Spindeln der Zähler, und die Anzahl der Zähne der Nenner ist. Daher würde sich das Rad nach obigen Beispiel $\frac{10}{80} = \frac{1}{8}$ mal umdråhen, indem sich das Getrieb einmal umdråhet.

Zusatz.

§. 290. Wenn man z. B. in der vorigen Machine die Umdråhungen der Kurbel und des an der nehmlichen Welle befindlichen Getriebes mit A, die des ersten Rades samt dem daran befindlichen Getriebe mit B, die des zweiten samt seinen Getriebe mit C, und die des dritten samt seiner Welle mit D; ferners die Radien, Umkreise oder Anzahl der Spindeln der Getriebe mit a, b, c, und die Radien, Umkreise, oder die Anzahl der Zähne der Råder mit f, g, h benennet, so ist nach §. 288. Fig. 94.

$$A : B = f : a$$
$$B : C = g : b$$
$$C : D = h : c$$

und $ABC : BCD = fgh : abc$

folglich ist $ABC \times abc = BCD \times fgh$

oder $A \times abc = D \times fgh$

und diese Gleichung in folgende Proportion aufgelöst:

$$A : D = fgh : abc.$$

Daraus also erhellet, daß die Umdråhungen der Kurbel und ihres Getriebes zu den Umdråhungen des letzten Rades und seiner Welle wie das Produkt der Radien, Umkreise, oder Anzahlzähnen aller Råder zum Produkt der Radien, Umkreise, oder Anzahlspindeln aller Getrieben sich verhalten.

Zusatz.

§. 291. Drähet sich demnach das letzte Rad und seine Welle einmal um, so kan man finden, wie oft sich die Kurbel in der nehmlichen Zeit umdrähen mus, wenn man setzet, abc : fgh = 1 : A und $\frac{fgh}{abc} = A$ der Anzahl der Umdrähungen der Kurbel.

Es läst sich also die Anzahl der Umdrähungen der Kurbel oder überhaupt des ersten Getriebes, indem sich das letzte Rad mit ihrer Welle einmal umdrähet, allezeit durch einen uneigentlichen Bruch, davon das Produkt der Anzahl der Zähnen, der Umkreisen, oder Radien aller Räder der Zähler, und das Produkt der Anzahlspindeln der Umkreisen, oder Radien aller Getrieben der Nenner ist, vorstellen.

Lehrsatz.

Fig. 94. §. 292. In einer Rädermachine verhält sich die Kraft zur Last, wie umgekehrt ihre Räume, welche sie in gleicher Zeit beschreiben.

Beweis: Betrachtet, daß, wenn sich das letzte Rad D mit seiner Welle einmal umdrähet, von dem Stricke, daran die Last hanget, sich so viel um die Welle winde, oder die Last um so viel bewege, als der Umkreis der Welle betragt, und daß die Kraft, welche am Ende der Kurbel angebracht ist, indessen so viele Umkreise, deren Radius die Länge der Kurbel ist, beschreiben müsse, so oft sich dieselbe in der Zeit, da das letzte Rad D sich einmal herum beweget, umdrähen mus §. 291. Wenn man demnach wie zuvor die Umkreise der Getriebe und der letzten Welle durch abcd, und die Umkreise der Kurbel und aller Räder

durch

durch efgh ausdrücket, so ist $\frac{fgh}{abc}$ die Anzahl der Umdrähungen der Kurbel, indem sich die Welle, woran sich die Last aufwindet, einmal umdrähet §. 291. d ist folglich der Weg oder Raum den die Last beschreibet, und wenn man die Anzahl der Umdrähungen der Kurbel durch den Umkreis derselben multiplicirt, so ist $\frac{efgh}{abc}$ der Weg, den die Kraft beschreibet. Es wäre nun zu erweisen, daß $P : Q = d : \frac{efgh}{abc}$.

Um nun dieses zu bewerkstellen, so betrachtet, daß die Kraft sich zur Last wie das Produkt aller Radien der Getriebe und der Welle zu dem Produkt der Radien aller Räder und der Kurbel verhalte, §. 285. Da sich aber die Umkreise wie ihre Radien verhalten, so kan man auch sagen, daß:

$$P : Q = abcd : efgh.$$

D. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie das Produkt der Umkreise aller Getrieben und der letzten Welle, zum Produkt der Umkreise der Kurbel und aller Räder; folglich ist $Qabcd = Pefgh$

und $Qd = \frac{Pefgh}{abc}$.

Löset man die Gleichung in folgende Proportion auf, so ist $P : Q = d : \frac{efgh}{abc}$

woraus also erhellet, daß die Kraft sich zur Last wie umgekehrt die Räume, welche sie in gleicher Zeit beschreiben, verhalte.

Aufgabe.

§. 293. Es sei eine Rädermachine anzuordnen, in welcher das erste Getrieb eine verlangte Anzahl Um-

 drä-

drähungen machet, indem das lezte Rad mit seiner Welle sich einmal umdrähet, und man sol sowohl die Anzahl der Räder und Getrieben, als auch ihre Radien und die Anzahl der Zähnen und Spindeln eines ieden angeben.

Da diese Aufgabe eigentlich unter die unbestimte Gattung, d. i. unter iene, welche mehrere Auflösungen leiden, gehöret, so ist es auf gewisse Weise wilkührlich, wie viele Räder und Getriebe ihr anwenden sollet, wenn euch nicht etwann der Plaz oder andere Umstände zu einer gewissen Zahl und Grösse derselben nöthigen. Wir wollen aber sezen, daß ihr drei Räder, und eben so viele Getriebe machen, und den Getrieben so wohl eine gleiche Anzahlspindeln = n als gleiche Radien = r geben wollet, und daß durch $\frac{m}{1}$ und zwar durch den Zähler die gegebene Anzahl der Umdrähung des ersten Getriebes, und durch den Nenner die Umdrähung des lezten Rades ausgedruckt werde.

Auflösung: 1. Zerteilet die gegebene Anzahl der Umdrähungen des ersten Getriebes in so viele kleine Faktoren, als ihr Räder nehmen wollet. dieses geschihet in Zahlen meistens durch einige Versuche, indem man solche Zahlen suchet, deren Produkt der gegebenen Anzahl der Umdrähungen gleich ist, wir wollen sezen, daß diese a, b und c wäre,

und daß also $\frac{a}{1} \times \frac{b}{1} \times \frac{c}{1} = \frac{m}{1}$ seie.

Solte es sich aber ereignen, daß die gegebene Anzahl der Umdrähungen sich nicht in die verlangte Anzahlfaktoren

zer-

zerfällen liesse, so versuchet es mit mehrern oder wenigern, und nehmet alsdenn eben so viele Räder, als ihr Faktoren erhalten habt.

2. Nehmet die Anzahlspindeln n, welche ihr den Getrieben geben wolt, willkührlich an, und multiplicirt sowohl die Zähler als Nenner der obigen drei Brüchen oder Verhältnissen, so bekomt ihr $\frac{an}{n}$ $\frac{bn}{n}$ $\frac{cn}{n}$, wovon die Zähler die Anzahlzähne eines ieden Rades, und die Nenner die Anzahlspindeln eines ieden Getriebes anzeigen §. 287.

3. Nehmet auch die Radien r der Getrieben nach Belieben, d. i. nachdem ihr die Machine gros machen wollet, an; multipliciret mit dieser Grösse sowohl die Zähler als Nenner der obigen Brüchen oder Verhältnissen, so bekomt ihr $\frac{ar}{r}$ $\frac{br}{r}$ $\frac{cr}{r}$, wovon die Zähler die Radien der Räder, und die Nenner die Radien der Getrieben vorstellen. §. 288.

Beispiel.

Es seie, daß das erste Getrieb 160mal umlaufen sol, indem das lezte Rade einmal umgehet, diese Zahl nun in die gehörige Faktoren zerlegt, giebt $\frac{4}{1} \times \frac{5}{1} \times \frac{8}{1} = \frac{160}{1}$ der Verhältnisse eines ieden Rades zu seinen Getriebe.

Ferner nehmen wir an, daß man einem ieden Getriebe 12 Spindeln geben wolle; folglich mit dieser Zahle obige Verhältnisse multiplicirt, giebt $\frac{48}{12}$ $\frac{60}{12}$ $\frac{96}{12}$, wovon die Zähler die Anzahlzähne eines ieden Rades, und die Nenner die Anzahlspindeln ihrer Getriebe anzeigen.

End-

Endlich setzen wir, daß man ieden Radius der Getriebe = 2 machen wolle; folglich wenn man damit obige Verhältnisse abermal multiplicirt, so bekomt man $\frac{8}{2}$ $\frac{10}{2}$ $\frac{16}{2}$, wovon ein ieder Zähler den Radius eines Rades und ieder Nenner den Radius dessen Getriebes vorstellet.

Zusatz.

§. 294. Woltet ihr aber den Getrieben keine gleiche Anzahlspindeln, und keine gleiche Radien geben, so multiplicirt die obige Verhältnisse der Räder zu ihren Getrieben ein iedes mit der angenommenen Anzahlspindeln des Getriebes, und dann auch eben dieselben ein iedes mit dem angenommenen Radius seines Getriebes, so werden wenn z. B. n, o, p die Anzahlen der Spindeln, und r, s, t die Radien der Getriebe wären, von den daraus entstehenden Produkten $\frac{an}{n}$ $\frac{bo}{o}$ $\frac{cp}{p}$ die Zähler die Anzahlzähne der Räder, und die Nenner die Anzahlspindeln der Getriebe, so wie von $\frac{ar}{r}$ $\frac{bs}{s}$ $\frac{ct}{t}$ die Zähler die Radien der Räder, und die Nenner die Radien der Getrieben vorstellen.

Beispiel.

Es sei, daß man dem ersten Getriebe 8, dem zweiten 10, und dem dritten 12 Spindeln geben wolle, so werden, wenn ihr damit die Multiplication an den obigen Verhältnissen verrichtet, $\frac{32}{8}$ $\frac{50}{10}$ $\frac{96}{12}$, die Zähler die Zähne eines ieden Rades und die Nenner die Spindeln ihrer Getriebe vorstellen.

Um

Um sich davon zu überzeigen, so betrachtet, daß $1 : 160 = 8 \times 10 \times 12 : 32 \times 50 \times 96 = 960 : 153600$ sei. §. 290.

Nicht minder setzen wir, daß man dem ersten Getrieb 6, dem zweiten 7 und dem dritten 8 zum Radius geben wolle, so werden, wenn man damit die Multiplikation wie gleich oben verrichtet, von den daraus entstehenden Produkten $\frac{24}{8}$ $\frac{35}{7}$ $\frac{64}{8}$ die Zähler die Radien der Räder, und die Nenner die Radien ihrer Getrieben vorstellen, weil wiederum $1 : 160 = 6 \times 7 \times 8 : 24 \times 35 \times 64$ ist.

Aufgabe.

§. 295. Es sei eine Rädermachine anzuordnen, in welcher eine gewisse an die Kurbel des ersten Getriebes angebrachte Kraft, mit einer an die letzte Welle sich aufwindenden und gegebenen Last im Gleichgewicht stehet, und man sol sowohl die Anzahl der Räder und Getrieben, als auch ihrer Zähnen und Spindeln und ihre Radien angeben.

Diese Aufgabe gehöret eben wie die vorige unter die unbestimmten, oder kan auf mehre Arten aufgelöset werden, und man ist an eine gewisse Anzahlräder, und an ihre Grösse nicht gebunden, wenn man nicht durch Umstände dazu genöthiget ist.

Auflösung: 1. Dividiret die Zahl, welche die gegebene Last ausdrucket, durch die Zahl, welche die Kraft andeutet; den Quotienten sehet als den Zähler eines Bruches an, der die Einheit zum Nenner hat, und das Verhältnis der Kraft zur Last anzeiget.

2.

2. Zerfället den Zähler dieses Bruches durch einige angestelte Versuche in so viele Faktoren als ihr Welbäume, oder samt der Kurbel Räder machen wollet, doch so, daß das Produkt dieser Faktoren dem Zähler des Bruches gleich seie.

3. Sehet diese Faktoren ebenfals als die Zähler so vieler Brüchen an, deren ieder die Einheit zum Nenner hat, so stellen sie die Verhältnisse vor, welche die Getriebe und die lezte Welle zu der Kurbel und zu den an den nehmlichen Welbäumen befestigten Rädern haben sollen.

4. Nehmet an, wie gros ihr die Radien der Getriebe und der lezten Welle machen wollet; dabei ihr aber Sorge zu tragen habt, daß die leztere Getriebe immer einen grösseren, und die lezte Welle den grösten Radius erhalte, weil sie den grösten Teil der Last zu tragen hat, und wenn sie zu klein angenommen würde, ein sehr dicker Strick, wie er zu einer sehr beträchtlichen Last erforderlich ist, sich sehr unbequem aufwinden liesse.

5. Multipliciret diese angenommene Radien einen ieden durch den Zähler und auch durch den Nenner eines der obigen Brüchen, und zwar einen ieden durch einen andern, so erhaltet ihr wieder neue Brüche, deren Nenner die Radien der Getriebe und der lezten Welle, und die Zähler die Radien der Kurbel und der Räder anzeigen.

6. Um die Dicke der Spindeln und Zähnen zu bestimmen, ist vor allen erforderlich, daß ihr die Stärke derselben in dem lezten Getriebe, welches in das lezte Rade eingreifet, so stark annehmet, daß sie durch die Last nicht zerbrochen werden können. Suchet daher

den

den Umkreis des letzten Getriebes; dividiret denselben mit einer beliebigen Zahl, die ihr glaubet für die Anzahl der Spindeln dieses Getriebes annehmen zu können, der Quotient wird euch die dicke einer Spindel samt einer Zwischenweite anzeigen. Scheinet euch nun diese noch zu schwach, so nehmet einen etwas kleinern Divisor an, und dividiret von neuen, bis ihr sehet, daß euch der Quotient eine hinlängliche Stärke für die Spindeln giebt, welche zugleich die Dicke eines Zahnes und einer Zwischenweite an dem letzten Rade sein wird. Da die Spindeln und Zähne der übrigen Getrieben und Rädern, so wie sie von dem letztern weiter abstehen, immer weniger Gewalt auszustehen haben, so könt ihr auch ihre Dicke vermindern, dieses aber wird geschehen, wenn ihr einen ieden Getriebe, weil ihre Radien schon nach Maas, als sie weniger auszustehen haben, abnehmen, eine gleiche Anzahlspindeln gebet. Es verstehet sich von selbsten, daß, wann die Radien der Getriebe alle gleich angenommen wären, ihr dem erstern mehrere Spindeln als dem letzten zu geben hättet. Dieses also vorausgesetzt, suchet mit Hülfe der gefundenen oder angenommenen Radien ihre Umkreise, dividirt sie mit dem zuvor angenommenen Divisor, welcher die Zahl der Spindeln ausdrucket, so wird euch der Quotient eines ieden die Dicke einer Spindel oder eines Zahnes samt einer Zwischenweite geben; die ihr übrigens nach der nach §. 282. gegebene Anmerkung gehörig einteilen könnet.

7. Um noch die Anzahl der Zähnen eines ieden Rades zu finden, so dividiret dessen Umkreis durch die Dicke und Zwischenweite einer Spindel des Getriebes welches in dasselbe eingreifet, der Quotient wird die Anzahl der Zähne des Rades anzeigen. Oder da sich die Radien wie die Umkreise, und diese wie die An-

zahl

zahl der Spindeln und Zähne verhalten, so setzet: wie der Radius des Getriebes zum Radius des Rades, in welches dasselbe eingreifet, eben so verhält sich die Anzahl der Spindeln des nehmlichen Getriebes zur Anzahl der Zähnen dieses Rades.

Beispiel.

Es seie eine Rädermachine anzuordnen, in welcher die Kraft eines Menschen = 25 ℔ an der Kurbel angebracht, mit einer an der letzten Welle aufzuwindenden Last von 12000 ℔ im Gleichgewicht stehen sol, und die Umstände erforderten 4 Welbäume, oder eine Kurbel drei Räder und eben so viele Getriebe, samt der letzten Welle worauf sich die Last windet. Da ist nun $\frac{12000}{25} = \frac{480}{1} = \frac{3}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{5}{1} \times \frac{8}{1}$ welche leztere Brüche die Verhältnisse der Getriebe und Räder andeuten.

Es sei, daß der Radius der letzten Welle = 9 sein müsse, damit sie die gegebene Last zu ertragen im Stand seie, und der Strick sich bequem auf dieselbe winden lasse, und daß der Radius des letztern Getriebes = 6, der des mittlern = 5, und der des erstern an der Kurbel = 4 angenommen werde.

Die obige Verhältnisse nun mit diesen angenommenen Radien multiplicirt, giebt $\frac{12}{4}$ $\frac{20}{5}$ $\frac{30}{6}$ $\frac{72}{9}$, wovon der erste Zähler der Radius der Kurbel, der zweite der des ersten Rades, der dritte der des zweiten, und der vierte der des dritten Rades ist, und der erste Nenner ist der Radius des ersten Getriebes, der zweite des zweiten, der dritte des dritten, und der vierte der letzten Welle.

Um-

Umkreise der Kurbel und Räder

$$\frac{75\frac{3}{7}}{25\frac{1}{7}} \quad \frac{125\frac{5}{7}}{31\frac{3}{7}} \quad \frac{188\frac{4}{7}}{37\frac{5}{7}} \quad \frac{452\frac{4}{7}}{56\frac{4}{7}}$$

Umkreise der Getrieben und der letzten Welle.

Nehmet für iedes Getriebe z. B. 9 Spindeln an, so sind $37\frac{5}{7} : 9 = 4\frac{4}{21}$, $31\frac{3}{7} : 9 = 3\frac{31}{63}$ und $25\frac{1}{7} : 9 = 2\frac{50}{63}$ die Dicken der Spindeln und einer Zwischenweite der drei Getrieben, und auch der Zähnen samt ihrer Zwischenweite der Räder, in welche sie eingreifen müssen.

Um die Anzahl der Zähne der Räder zu finden, so setzet: wie sich der Radius eines ieden Getriebes zum Radius des Rades, in welches dasselbe eingreifet, verhält, eben so verhalt sich die Anzahl der Spindeln des nehmlichen Getriebes zur Anzahl der Zähnen desselben Rades. D. i.

$$4 : 20 = 9 : x = \frac{20 \times 9}{4} = 45$$ Anzahlzähne des 1ten Rades

$$5 : 30 = 9 : x = \frac{30 \times 9}{5} = 56$$ Anzahlzähne des 2ten Rades

$$6 : 72 = 9 : x = \frac{72 \times 9}{6} = 108$$ Anzahlzähne des 3ten Rades.

Öfters wird bei Rädermachinen z. B. bei einer gewöhnlichen Wagen oder Fuhrmannswinde anstaat der letzten Welle noch ein Getriebe, welches in eine steife gerade, und an der Seite mit Zähnen versehnen Stange eingreifet, angebracht. Es verändert aber diese Einrichtung nichts in der gegebenen Berechnungsart der Kräften der Machine.

chine. Man hat nur dieses letzte Getriebe als die Welle, worauf sich sonst der Strick windet, die Stange aber als den Strick selbst zu betrachten.

Von der Schraube ohne Ende.

Erklärung.

Fig. 95. §. 296. Wenn die Gänge einer Schraubenspindel BF in die Zähne eines Stiernrades anstaat einem gewöhnlichen Getriebe eingreifen, so wird diese Machine eine Schraube ohne Ende genent.

Zusatz.

§. 297. Die Zähne an dem Stiernrade müssen etwas schrähe d. i. nach den Winkel welchen die Schraubengänge mit der Spindel machen, eingerichtet werden, damit die Schraube gut eingreifen könne; und diese brauchet nur einige wenige Gänge zu haben, weil die übrigen ohnehin nicht eingreifen könnten. Gewöhnlicher Weise wird die Kraft an der Kurbel der Schraubenspindel und die Last an die Welle des Rades angebracht; wie wohl es auch manchesmal umgekehrt geschihet, nehmlich wenn man eine sehr schnelle Bewegung herfür bringen will.

Lehrsatz.

§. 298. Wenn eine Kraft mit einer an eine Schraube ohne Ende angebrachten Last im Gleichgewicht stehen sol, so mus sich die erstere zur andern wie das Produkt der Schraubengangweite in den Radius der Welle, woran die Last befindlich, zum Produkt des Umkreises, den die Kraft an der Kurbel beschreibet, in den Radius des Rades verhalten.

Be-

Beweis: Es seie die Weite eines Schraubenganges an der Spindel BF = a; der Umkreis, den die an die Kurbel angebrachte Kraft bei einer Umdrähung derselben beschreibet, = C; der Radius der Welle, woran sich die Last aufwindet = r; der Radius des Stiernrades = R; die an die Kurbel angebrachte Kraft = P; die Last oder der Widerstand, den ein Schraubengang auszustehen hat = q; die Kraft welche an die Zähne des Rades würken mus, um der Last an der Welle das Gleichgewicht zu halten = p; und die Last, welche mit der an der Kurbel angebrachten Kraft im Gleichgewicht stehen sol = Q; so ist erstlich, wenn man sowohl die Schraube, als das Rad an der Welle einzeln betrachtet:

$$a : C = P : q. \text{ §. 261.}$$

$$\text{und } r : R = p : Q. \text{ §. 231.}$$

Folglich ist $\frac{CP}{a} = q$ gleichsam als die Würkung der Schraube in das Rad anzusehen, oder als die Kraft p zu betrachten, welche an die Zähne angewendet werden mus; derowegen kan man anstaat derselben in der vorigen Proportion setzen:

$$r : R = \frac{CP}{a} : Q$$

$$\text{und also ist } \frac{CRP}{a} = rQ$$

$$\text{oder } \frac{CRP}{ar} = Q.$$

Löset man nun die Gleichung in folgende Proportion auf, so ist P : Q = ar : CR. D. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie das Produkt der Schraubengangweite in den Radius der Welle zum Produkt des Umkreises der Kurbel in den Radius des Rades.

Zusaz.

§. 299. Wenn man betrachtet, daß das Rad nur eine Zahnweite gehet, indem die Kurbel sich einmal ganz herumdrähet, so siehet man, daß die an der Kurbel befindliche Kraft so viele Umkreise beschreiben mus, als Zähne in dem Rade enthalten sind, bis das Rad einmal herumgehet, oder bis die an der Welle befindliche Last einen Weg gemacht hat, der dem Umkreis der Welle gleich ist. Wenn nun dieser = s; der Umkreis der Kurbel = C; die Anzahl der Zähne oder der Umkreis des Rades = N ist, so stellet CN den Weg der Kraft in der nehmlichen Zeit vor, und folglich kan man sezen: P : Q = S : CN. §. 267., weil sowohl die Schraube als das Rad an der Welle als Hebeln betrachtet werden können; daß daher an einer Schraube ohne Ende die Kraft zur Last wie der Umkreis der Welle zum Produkt des Umkreises der Kurbel in die Anzahl der Zähne oder in den Umkreis des Rades sich verhalten müsse, wenn sie einander das Gleichgewicht halten sollen.

Aus diesem ist nun unschwer zu erkennen, daß bei der Schraube ohne Ende an der Kraft sehr viel zu gewinnen seie, oder mit einer sehr geringen Kraft eine grosse Last wie wohl sehr langsam bewegt werden könne, wenn die erste an der Kurbel, die andere aber an der Welle angebracht wird; so wie im Gegenfalle nehmlich: wenn die Kraft an der Welle, die Last aber an der Schraubenspindel befindlich ist, eine sehr grosse Kraft erfordert wird, hingegen aber eine sehr schnelle Bewegung derselben herfür gebracht wird.

Der Theorie nach solte man durch mehrere zusammengesezte Schrauben ohne Ende mit einer sehr

gerin-

geringen Kraft ganz ungeheure Lasten bewegen können; da aber die Reibung an derlei Machinen so beträchtlich wird, daß man in manchen Fällen zur Uberwindung derselben mehr Kraft als zur Hebung der Last selbst nöthig hat, so würde der Vorteil, den man davon zu ziehen glaubte, nur in der Einbildung bestehen. Die Umstände allein können und müssen bestimmen, wann und wo eine Schraube ohne Ende mit Nutzen anzuwenden seie. Eine Erinnerung die in der Mechanik überhaupt nie oft genug gemacht werden kan.

Von dem sogenanten Artilleriehebzeuge.

§. 300. Man bedienet sich bei der Artillerie eines fast algemein bekanten Hebzeuges, um das schwere Geschütz aus und in ihre Lasseten zu heben. Seine Einrichtung ist zwar oft in einigen Stücken unterschieden, im wesentlichen aber sol er allezeit folgende Eigenschaften haben. 1ten: Mus sein Gestell so beschaffen sein, daß es Stärke genug hat, die Last des schweresten Geschützes, so man damit heben wil, zu tragen, und daß es aller Orten leicht, und ohne viele Weitläuftigkeit aufgerichtet werden könne. 2ten: Daß man ein Geschütz auf seiner Lasseten bequem darunter führen, und aus seinen Schildpfannen noch etwas in die Höhe heben könne. 3ten: Daß er überhaupt so eingerichtet seie, damit man an der Kraft soviel gewinne, daß einige Menschen ein schweres Geschütz aufheben können. 4ten: Daß die an dem Stricke freihangende Last in allen Stellungen still zu halten, und die Bewegung der Machine zu sperren gericht seie.

Um also diese Absichten zu erreichen, wird das Gestell meistens aus vier und oft auch nur drei geraden Balken dergestalt zusammengesetzt, daß sie oben gleichsam in einen Punkt zusammenlaufen, und durch eine starke eisene Spindel oder Nagel A, welcher durch die an ihren obern Enden befindliche Löcher gesteckt wird, zusammen gehalten werden, unten aber soweit auseinander stehen, daß man ein Geschüz darunter führen kan. Oben an die eiserne Spindel wird gewöhnlich ein Flaschenzug CD von zwo oder drei unbeweglichen und eben soviel beweglichen Flaschenscheiben aufgehangen. Das eine Ende des um dieselbe gewundenen Strickes wird an einen horizontal an zween Balken angebrachten Welbaum E befestiget, um denselben daran aufwinden zu können. Damit sich dieser Welbaum umdrähen lasse, werden an seinen beiden Enden entweder Sprossen wie an einem Haspel, oder ein eisernes Sternrad angebracht, in welches entweder ein Getrieb, oder eine Schraube ohne Ende greifet, nachdem man gesonnen ist, die Kraft zu vermehren. Damit aber die Machine in allen Stellungen so oft es erforderlich, gesperret werden könne, so wird an dem Welbaum nahe an einem der beiden Balken ein eisernes so genantes Sper oder Stelrade G, dessen Zähne auf einer Seite perpendikular, auf der andern aber schrähe eingeschnitten sind, angebracht, auf welchen alsdenn ein an dem Balken befestigter, aber um seinen Ruhepunkt beweglicher so genanter Stel oder Sperhacken H aufliegt, im Aufziehen über die gedachten Zähne hinweg glitschet, im Nachlassen aber sich gleich an den nächsten anstemmet, und die Last weiter hinabzusinken verhindert, wenn er nicht, da es erfordert ist, ausgehoben wird.

Fig. 96.

Um

Um zu wissen welche Last durch eine gewisse an diese Machine gebrachte Kraft gehoben werden könne, oder umgekehrt, welche Kraft erfordert wird, um eine gegebene Last in Bewegung zu setzen, so hat man anfänglich den Stand des Gleichgewichtes der Kraft und Last zu betrachten, und denn zur würklichen Uberwindung sowohl desselben, als der Reibung der Machine entweder die Kraft noch um etwas zu vermehren, oder die Last zu vermindern. Wo aber von der letzten in seinem Orte noch ein mehreres vorkommen sol. Bestünde also z. B. der daran befindliche Flaschenzug aus drei beweglichen und soviel unbeweglichen Scheiben, so würde im Stand des Gleichgewichts die an dem einen Ende des Stricks unmittelbar angebrachte Kraft zu der an den beweglichen Flaschenscheiben hangenden Last wie 1 : 6 sein, §. 270. Wäre ferner der Radius des Welbaums = 5 Zoll, und der Radius oder die Länge eines Sprossens = 25 Zoll, so ist die an den Sprossen angebrachte Kraft zu der an dem Strick würkenden Last wie 5 : 25 oder wie 1 : 5. §. 231. Da nun hier wie bei allen zusammengesetzten Machinen eine in die andere würket, so verhält sich die an die Sprossen angebrachte Kraft zu der an dem Flaschenzug hangenden Last wie das Produkt der einzelnen Kräften an dem Strick des Flaschenzugs und an dem Welbaum, zum Produkt der einzelnen Lasten an dem Flaschenzug und Welbaum: d. i. $P : Q = 1 \times 1 : 6 \times 5 = 1 : 30$, oder die Kraft kan bei dieser Einrichtung 30mal minder als die Last sein, damit sie einander das Gleichgewicht halten. Wird nun die Kraft von vier Menschen, die man hier bei ieden für 50 ℔ und also zusammen für 200 ℔ annehmen kan, an die Sprossen angebracht, so ist $1 : 30 = 200 : x = 6000$ ℔,

oder die Kraft dieser 4 Menschen wird mit einer Last von 60 Centnern im Gleichgewicht stehen.

Auf eine ähnliche Art hätte man mit der Berechnung zu verfahren, wenn anstaat der Sprossen ein Stiernrad und Getrieb, oder eine Schraube ohne Ende u. d. gl. angebracht wären.

Eine andere sehr einfache und nutzbare Art eines solchen Hebzeuges ist folgende: das Gestell ist überhaupt wie in dem vorigen beschaffen, nur werden oben zwo unbewegliche Flaschenscheiben A, B neben einander und in C eine bewegliche angebracht um den Strick die nöthige Richtung zu geben. Die Länge des Welbaums ist in zween Teile geteilet, und der eine hat einen grössern Durchmesser als der andere, so zwar daß der kleinere nur $\frac{2}{3}$ von dem grössern ist. Beide Ende des Stricks werden und zwar eines an dem dickern, und das andere an dem dünnern Teil befestiget, aber auf dieselbe verkehrt aufgewickelt, so daß wenn der Welbaum umgedrähet wird, und die Last gehoben werden sol, der Strick sich an dem dicken Teil auf, und an dem dünnern abwinden mus; sol man aber die Last sinken lassen, so geschihet es umgekehrt. Nebst deme daß die Kraft durch diese Machine vermehret wird, hat sie auch noch die besondere Eigenschaft, daß die Last nie für sich zurücksinket, wenn auch gleich die an den Sprossen angebrachte Kraft zu würken aufhöret. Man hat also dabei kein sogenantes Stell oder Sperrade mit seinem Einfalhacken nöthig wie in dem vorigen Hebzeuge. Um zu wissen wie viel die Kraft an dieser Machine vermehret wird, kan man sich einer der folgenden Berechnungsarten bedienen;

Er-

Erste Art: Da iede zusammengesetzte Machine aus mehrern in einander würkenden Hebeln bestehend angesehen werden kan §. 264. und in diesen die Kraft zur Last sich wie umgekehrt ihre Geschwindigkeiten oder die Wege, so sie in gleicher Zeit beschreiben, verhält, §. 219 u. 267. so hat man auch nur diese Geschwindigkeiten folgender Maassen zu suchen, nehmlich: es seie die Länge ED des Sprossens oder Hebbaums bis in den Mittelpunkt der Welle = 6 Sch. der grössere Durchmesser der Welle = 12 Zoll, und der kleinere = 8 Zoll. Dráhet sich nun der Welbaum einmal um, so beschreibet die in E angebrachte Kraft P einen Umkreis, der ED zum Radius hat, und den wir also um die Brüche zu vermeiden = 36 Sch. annehmen wollen, und der zugleich die Geschwindigkeit der Kraft ausdruckt. In eben dieser Zeit windet sich der Strick auf dem dicken Teil des Welbaums, der 12 Zoll zum Durchmesser hat, 3 Sch. auf, und von dem kleinern, der 8 Zoll ist, 2 Sch. ab; da es aber einerlei Strick ist, so kan sich dort nicht mehr auf, und hier nicht weniger abwinden, ohne daß der Teil, an welchen die Last hanget, um so viel verkürzt würde, als sich an dem einen in eben der Zeit weniger abwindet, so ist klar, daß der Strick sich hier um 1 Schuh verkürze; weil aber diese Verkürzung in beide Teile L und M verteilet werden mus, indem er dopelt ist, so wird ieder nur um 6 Zoll verkürzet, folglich beschreibet die Flaschenscheibe C mit der daran hangenden Last Q in der nehmlichen Zeit, als die Kraft einmal herumgehet, nur 6 Zoll. Daher verhält sich auch die Geschwindigkeit der Last zur Geschwindigkeit

Fig. 98. Fig. 97.

der Kraft wie 6 Zoll zu 36 Sch. oder wie 1 : 72, und also auch die Kraft zur Last, d. i. P : Q = 1 : 72. §. 219 u. 267.

Zwote Art: Nehmet die vorigen Maassen an, und betrachtet, daß die Last Q = 72 durch die bewegliche Flaschenscheiben C bis auf die Hälfte, nehmlich auf 36 vermindert werde, §. 244. Da aber diese Last in beide Stricke L und M gleichsam verteilet ist, und solche gleich stark anspannet, so würket beiderseits sowohl am den grossen als kleinen Durchmesser des Welbaums eine Last = 36. nun aber sind beide Teile des Stricks auf eine entgegengesetzte Art aufgewunden, wie fig. 98. dem Durchschnit nach zusehen; folglich würken beide Teile der Last gegeneinander, und würden sich völlig aufheben, wenn die Radien FD und ID einander gleich wären; da sie aber ungleich sind, so hat die Last, so bei FH angebracht ist, und nach dieser Richtung ziehet, eine grössere Gewalt als die andere, so nach der Richtung IG ziehet. Es komt also nur darauf an, zu finden, was für ein Teil der Last an FH die ganze andere an IG angebrachte im Gleichgewicht erhält, und wie viel folglich davon noch übrig bleibt? Derowegen betrachtet den Hebel FID der zwoten Art, wovon D der Ruhepunkt ist, so bekomt ihr FD : ID = 36 : zur Kraft an F; oder 3 : 2 = 36 : x = 24. Da nun aber bei F auch eine Last = 36 angebracht ist, ein Teil davon aber nehmlich 24 durch die Last bei IG im Gleichgewicht erhalten, und aufgehoben wird, so bleibt noch ein Teil davon nehmlich 12 übrig, der das Übergewicht hat, und folglich durch die Kraft P an dem Hebbaum erhalten werden mus. Um nun die-

Fig. 98.

diese zu finden, so schliesset: ED : FD = 12 : P; oder weil ED = 6 Sch. ist, wie 72″ : 6″ = 12 : 1. Folglich ist die Kraft P = 1 und die Last Q = 72, wie in der vorigen Berechnungsart, und es wird nicht schwer sein, daraus eine algemeine Formul zu ziehen.

Um nun noch zu untersuchen, woher es komme, daß die Last nicht von freien stücken zurücksinke, wenn die Kraft zu würken aufhöret, so betrachtet, daß die Last an FH eine grössere Gewalt als an GI habe, daß daselbst das Ubergewicht = 12 wäre, und folglich, wenn die Machine keine Reibung hätte, daß die Last schlechterdings zurücksinken müste. Da aber an verschiedenen Teilen der Machine eine beträchtliche Reibung geschihet, und dieselbe grösser als das an FH befindliche Ubergewicht, oder wenigsten demselben gleich ist, so mus auch die Machine stehen bleiben. Aus dieser Ursach könte es auch geschehen, daß, wenn man den kleinern Durchmesser der Wellen noch kleiner als $\frac{5}{6}$ des Grössern machte, das Ubergewicht bei FH grösser als die Reibung der Machine würde, und die Last zurücksinken müste. Ubrigens siehet man, daß die Reibung der Machine, die sonst oft so schädlich und hinderlich ist, hier zum Nutzen angewendet wird.

So wie diese Machine als ein Hebzeug um eine Last gerade in die Höhe zu heben angewendet werden kan, ist sie auch noch vorteilhaft zu gebrauchen, wenn eine Last auf Rollen, auf einem Schlitten, oder auf einem ordentlichen Wagen oder Fuhrwerk entweder auf einer horizontalen Ebene, oder über eine schiefliegende Fläche durch eine geringe Kraft herbei geschafet werden Fig. 99.

den

den sol. Es wird nehmlich der oben beschriebene Welbaum C in solchen Falle nur an ein anderes Gestelle, welches ungefähr wie ABD eingerichtet werden, und auf Rollräder B und D stehen kan um es leichter von einem Orte zum andern bringen zu können, angebracht, und an einem in die Erde geschlagenen Pfahle E angebunden. Nebst deme kan man die Sprossen F und G an beiden Enden des Welbaumes ausser den beiden gerade stehenden Gestelsaulen AI anbringen, um eine dopelte Kraft anwenden zu können. Insbesondere kan diese Maschine in solchen Fällen sehr nüzliche Dienste leisten, wenn Geschüze oder andere schwere Lasten über eine Anhöhe, oder über die Auffahrten sehr enger Befestigungswerker, wo man wegen Mangel des Raumes oder andern Umständen weder viele Leute anstellen, noch weniger aber sich der Pferde bedienen kan, gebracht werden sollen. Endlich hat diese Machine noch den wesentlichen Vorteil, daß sie im Falle der Noth, wenn es nehmlich sowohl an geschickten Arbeitern, an der Zeit, oder an anderer nöthiger Zugehör für eine andere Gattung eines künstlichen Hebezeuges, welcher die Kraft eben soviel vermehret, fehlet, von einem ieden Zimmerman und Schmide in kurzer Zeit verfertiget werden kan.

Von dem Kranich.

§. 301. Nebst dem beschriebenen Hebzeuge bedient man sich bei der Artillerie in Gieß und Zeughäusern öfters des sogenanten Kranichs um damit nicht allein schwere Lasten aufzuheben, sondern auch dieselbe frei hangend herum zu wenden, und an einem andern Orte

wie-

wieder nieder zu lassen. Die Machine wird nach den Umständen oft sehr verschieden eingerichtet. Bald gehet der Strick, woran die Last hanget, nur gerade zu über die in A und B befestigte Flaschenscheiben; bald wird bei der erstern auch noch ein ordentlicher Flaschenzug angebracht; bald wird das eine Ende des Stricks, welches über B gehet, nur um die Welle eines Haspels, daran die Kraft ziehet, gewunden; bald aber wird anstaat diesem an der Welle ein sogenantes Tretrad angebracht, in welchen ein oder zween Menschen herumgehen, und durch ihr Gewicht das Rad und die Welle bewegen, und den Strick mit der Last aufwinden. Ofters wird auch anstaat diesem eine Welle mit einem oder mehrern eisernen Stiernrädern D und Getrieben oder mit einer Schraube ohne Ende C versehen. Die Berechnung des Verhältnisses der Kraft zur Last hat sich alsdenn auch nach der eigentlichen Einrichtung der Machine zu richten. Das Gestel wird ebenfals, nachdem es gros oder stark sein sol, auf verschiedene Art angeordnet. Man hat aber dabei hauptsächlich zu sehen, daß der Balken AB stark genug seie, gehörig unterstüzet werde, und daß sich die geradstehende Saule, woran eigentlich das ganze Bauwerke der Machine befestiget wird, auf ihren Zapfen I und L bequem und so weit herum drähen lasse, als die Umstände erfordern. Fig. 100.

Von dem sogenanten Hebel von Garuß.

§. 302. Jene Machine, so unter dem Namen als Hebel von Garuß bekant ist, kan nicht minder zur vorteilhaften Bewegung schwerer Lasten in einigen Fällen mit Nutzen angewendet werden.

Fig. 101. Es bestehet aber derselbe hauptsächlich aus einer Welle A, worauf sich der Strick mit der Last aufwindet; aus einem an eben dieselbe befestigten Sternrade B, dessen Zähne wie die an einem Sper oder Stelrade nach einer Seite zu schief eingeschnitten sind; aus einer Hebelstange CD die sich um den Ruhepunkt O bewegen läst, und an deren beiden Enden die bewegende Kraft angebracht wird; und aus zween eisernen Hacken am, und dn, die auf beiden Seiten des Ruhepunkts O an der Hebelstange dergestalt befestiget sind, daß sie sich an derselben frei herum bewegen kön en; ihre untere Ende m und n liegen dergestalt auf dem Rade auf, daß, wenn die Hebelstange auf und nieder beweget wird, und mit ihren Enden die Bögen Cl und DG beschreibet, einer derselben immer wechselweise über einige Zähne hinab glitschet, indem der andere in einen Zahn eingreifet, und das Rad eben soweit nach sich ziehet, als der andere geglitschet ist, folglich die Last an der Welle einen gewissen Teil aufgewunden wird. Das Rad wird gemeiniglich nur aus über das Kreuz gelegten und übereinander genagelten Brettern zusammengesetzt, und zwischen derselben äussern Rande ein etwas breiter eiserner Zirkel, in welchen die Zähne eingeschnitten sind, dergestalt eingelassen, daß nur die Zähne allein vorstehen. Das übrige vom Gestelle ist meistens willkührlich, und richtet sich nach den Umständen.

Damit aber die an beiden Enden der Hebelstange angebrachten Kräfte mit gleicher Gewalt würken können, so ist überhaupt folgendes zu beobachten. 1ten: Erwählet die zween Zähne f und g, in welche ihr die Hacken eingreifen lassen wollet, wenn die Hebelstange sich eben im horizontalen Stande EF befindet; nur mit der Vorsicht, daß ihr f nicht unter der horizontal mA setzet, weil der Hacken durch sein eigen Gewicht

nicht

nicht mehr leicht von sich selbst in die Zähne einfallen würde; und daß g so viele Zähne von f aufwärts angenommen werde, daß ein Hacken dem andern im abglitschen nicht hindere. 2ten: Ziehet die Radien fA und gA, und fället auf dieselben aus f und g die Perpendikularen fh und gp, so werden diese die Richtungslinien, nach welchen die beiden Hacken würken, vorstellen; nicht minder errichtet auch auf LN eine Perpendikular lr, so durch den Mittelpunkt des Rades oder der Welle gehet. 3ten: Erwählet nun nach einer beliebigen Art auf lr einen Punkt O, der eben eine solche Lage hat, daß die von demselben auf die Richtungslinien fh und gp gezogenen Perpendikularen Ob und Oc von gleicher Länge werden, und ziehet EF durch O parallel zu LN; so wird EF den horizontalen Stand der Hebelstange; O die Stelle ihres Ruhepunkts; die Durchschnitspunkten i und e von EF, fh und gp die Entfernung, in welchen beide Hacken von dem Ruhepunkt O an der Hebelstange befestiget müssen werden, damit die an beiden Enden angebrachte Kraft mit gleicher Leichtigkeit arbeiten könne; anzeigen.

Um nun auch noch zu wissen, wie groß die Kraft sein mus, welche an die Ende der Hebelstange angebracht mit einer gewissen an dem Strick sich um die Welle aufwindenden Last im Gleichgewicht stehet, so betrachtet, daß die an einen Zahne des Rades würkende Kraft zu der sich an der Welle aufwindenden Last: wie As : Af seie. §. 231. ferner da der Hebel EO oder FO von der zwoten Art ist, §. 211. und die Last schief in denselben würket, daß die an das Ende des Hebels angebrachte Kraft zu der an einen der Hacken würkenden Last wie Ob : EO oder wie Oc : FO seie. §. 224. Derowegen also ist $P : Q = As \times Ob : Af \times EO$, oder $P : Q = As \times Oc : Af \times FO$.

D. i.

oder die Kraft dieser 4 Menschen wird mit einer Last von 60 Centnern im Gleichgewicht stehen.

Auf eine ähnliche Art hätte man mit der Berechnung zu verfahren, wenn anstaat der Sprossen ein Stiernrad und Getrieb, oder eine Schraube ohne Ende u. d. gl. angebracht wären.

Eine andere sehr einfache und nutzbare Art eines solchen Hebzeuges ist folgende: das Gestell ist überhaupt wie in dem vorigen beschaffen, nur werden oben zwo unbewegliche Flaschenscheiben A, B neben einander und in C eine bewegliche angebracht um den Strick die nöthige Richtung zu geben. Die Länge des Welbaums ist in zween Teile geteilet, und der eine hat einen grössern Durchmesser als der andere, so zwar daß der kleinere nur $\frac{2}{3}$ von dem grössern ist. Beide Ende des Stricks werden und zwar eines an dem dickern, und das andere an dem dünnern Teil befestiget, aber auf dieselbe verkehrt aufgewickelt, so daß wenn der Welbaum umgedrähet wird, und die Last gehoben werden sol, der Strick sich an dem dicken Teil auf, und an dem dünnern abwinden mus; sol man aber die Last sinken lassen, so geschihet es umgekehrt. Nebst deme daß die Kraft durch diese Machine vermehret wird, hat sie auch noch die besondere Eigenschaft, daß die Last nie für sich zurücksinket, wenn auch gleich die an den Sprossen angebrachte Kraft zu würken aufhöret. Man hat also dabei kein sogenantes Stell oder Sperrade mit seinem Einfalhacken nöthig wie in dem vorigen Hebzeuge. Um zu wissen wie viel die Kraft an dieser Machine vermehret wird, kan man sich einer der folgenden Berechnungsarten bedienen:

Er-

Erste Art: Da iede zusammengesetzte Machine aus mehreren in einander würkenden Hebeln bestehend angesehen werden kan §. 264. und in diesen die Kraft zur Last sich wie umgekehrt ihre Geschwindigkeiten oder die Wege, so sie in gleicher Zeit beschreiben, verhält, §. 219 u. 267. so hat man auch nur diese Geschwindigkeiten folgender Maassen zu suchen, nehmlich: es seie die Länge ED des Sprossens oder Hebbaums bis in den Mittelpunkt der Welle = 6 Sch. der grössere Durchmesser der Welle = 12 Zoll, und der kleinere = 8 Zoll. Drähet sich nun der Welbaum einmal um, so beschreibet die in E angebrachte Kraft P einen Umkreis, der ED zum Radius hat, und den wir also um die Brüche zu vermeiden = 36 Sch. annehmen wollen, und der zugleich die Geschwindigkeit der Kraft ausdruckt. In eben dieser Zeit windet sich der Strick auf dem dicken Teil des Welbaums, der 12 Zoll zum Durchmesser hat, 3 Sch. auf, und von dem kleinern, der 8 Zoll ist, 2 Sch. ab; da es aber einerlei Strick ist, so kan sich dort nicht mehr auf, und hier nicht weniger abwinden, ohne daß der Teil, an welchen die Last hanget, um so viel verkürzt würde, als sich an dem einen in eben der Zeit weniger abwindet, so ist klar, daß der Strick sich hier um 1 Schuh verkürze; weil aber diese Verkürzung in beide Teile L und M verteilet werden mus, indem er dopelt ist, so wird ieder nur um 6 Zoll verkürzet, folglich beschreibet die Flaschenscheibe C mit der daran hangenden Last Q in der nehmlichen Zeit, als die Kraft einmal herumgehet, nur 6 Zoll. Daher verhält sich auch die Geschwindigkeit der Last zur Geschwindigkeit

Fig. 98.

Fig. 97.

der Kraft wie 6 Zoll zu 36 Sch. oder wie 1 : 72, und also auch die Kraft zur Last, d. i. P : Q = 1 : 72. §. 219 u. 267.

Zwote Art: Nehmet die vorigen Maassen an, und betrachtet, daß die Last Q = 72 durch die bewegliche Flaschenscheiben C bis auf die Hälfte, nehmlich auf 36 vermindert werde, §. 244. Da aber diese Last in beide Stricke L und M gleichsam verteilet ist, und solche gleich stark anspannet, so würket beiderseits sowohl an den grossen als kleinen Durchmesser des Welbaums eine Last = 36. nun aber sind beide Teile des Stricks auf eine entgegengesezte Art aufgewunden, wie fig. 98. dem Durchschnit nach zusehen; folglich würken beide Teile der Last gegeneinander, und würden sich völlig aufheben, wenn die Radien FD und ID einander gleich wären; da sie aber ungleich sind, so hat die Last, so bei FH angebracht ist, und nach dieser Richtung ziehet, eine grössere Gewalt als die andere, so nach der Richtung IG ziehet. Es komt also nur darauf an, zu finden, was für ein Teil der Last an FH die ganze andere an IG angebrachte im Gleichgewicht erhält, und wie viel folglich davon noch übrig bleibt? Derowegen betrachtet den Hebel FID der zwoten Art, wovon D der Ruhepunkt ist, so bekomt ihr FD : ID = 36 : zur Kraft an F; oder 3 : 2 = 36 : x = 24. Da nun aber bei F auch eine Last = 36 angebracht ist, ein Teil davon aber nehmlich 24 durch die Last bei IG im Gleichgewicht erhalten, und aufgehoben wird, so bleibt noch ein Teil davon nehmlich 12 übrig, der das Übergewicht hat, und folglich durch die Kraft P an dem Hebbaum erhalten werden mus. Um nun

Fig. 98.

die-

diese zu finden, so schliesset: ED : FD = 12 : P; oder weil ED = 6 Sch. ist, wie 72″ : 6″ = 12 : 1. Folglich ist die Kraft P = 1 und die Last Q = 72, wie in der vorigen Berechnungsart, und es wird nicht schwer sein, daraus eine algemeine Formul zu ziehen.

Um nun noch zu untersuchen, woher es komme, daß die Last nicht von freien stücken zurücksinke, wenn die Kraft zu würken aufhöret, so betrachtet, daß die Last an FH eine grössere Gewalt als an GI habe, daß daselbst das Ubergewicht = 12 ware, und folglich, wenn die Machine keine Reibung hätte, daß die Last schlechterdings zurücksinken müste. Da aber an verschiedenen Teilen der Machine eine beträchtliche Reibung geschihet, und dieselbe grösser als das an FH befindliche Ubergewicht, oder wenigsten demselben gleich ist, so mus auch die Machine stehen bleiben. Aus dieser Ursach könte es auch geschehen, daß, wenn man den kleinern Durchmesser der Wellen noch kleiner als $\frac{2}{3}$ des Grössern machte, das Ubergewicht bei FH grösser als die Reibung der Machine würde, und die Last zurücksinken müste. Ubrigens siehet man, daß die Reibung der Machine, die sonst oft so schädlich und hinderlich ist, hier zum Nutzen angewendet wird.

So wie diese Machine als ein Hebzeug um eine Last gerade in die Höhe zu heben angewendet werden kan, ist sie auch noch vorteilhaft zu gebrauchen, wenn eine Last auf Rollen, auf einem Schlitten, oder auf einem ordentlichen Wagen oder Fuhrwerk entweder auf einer horizontalen Ebene, oder über eine schiefliegende Fläche durch eine geringe Kraft herbei geschafet wer- Fig. 99.

den sol. Es wird nehmlich der oben beschriebene Welbaum C in solchen Falle nur an ein anderes Gestelle, welches ungefähr wie ABD eingerichtet werden, und auf Rollräder B und D stehen kan um es leichter von einem Orte zum andern bringen zu können, angebracht, und an einem in die Erde geschlagenen Pfahle E angebunden. Nebst deme kan man die Sprossen F und G an beiden Enden des Welbaumes ausser den beiden gerade stehenden Gestelsaulen AI anbringen, um eine dopelte Kraft anwenden zu können. Insbesondere kan diese Maschine in solchen Fällen sehr nüzliche Dienste leisten, wenn Geschüze oder andere schwere Lasten über eine Anhöhe, oder über die Auffahrten sehr enger Befestigungswerker, wo man wegen Mangel des Raumes oder andern Umständen weder viele Leute anstellen, noch weniger aber sich der Pferde bedienen kan, gebracht werden sollen. Endlich hat diese Machine noch den wesentlichen Vorteil, daß sie im Falle der Noth, wenn es nehmlich sowohl an geschickten Arbeitern, an der Zeit, oder an anderer nöthiger Zugehör für eine andere Gattung eines künstlichen Hebezeuges, welcher die Kraft eben soviel vermehret, fehlet, von einem ieden Zimmerman und Schmide in kurzer Zeit verfertiget werden kan.

Von dem Kranich.

§. 301. Nebst dem beschriebenen Hebzeuge bedient man sich bei der Artillerie in Gieß und Zeughäusern öfters des sogenanten Kranichs um damit nicht allein schwere Lasten aufzuheben, sondern auch dieselbe frei hangend herum zu wenden, und an einem andern Orte

wie-

wieder nieder zu lassen. Die Machine wird nach den Umständen oft sehr verschieden eingerichtet. Bald gehet der Strick, woran die Last hanget, nur gerade zu über die in A und B befestigte Flaschenscheiben; bald wird bei der erstern auch noch ein ordentlicher Flaschenzug angebracht; bald wird das eine Ende des Stricks, welches über B gehet, nur um die Welle eines Haspels, daran die Kraft ziehet, gewunden; bald aber wird anstaat diesem an der Welle ein sogenantes Tretrad angebracht, in welchen ein oder zween Menschen herumgehen, und durch ihr Gewicht das Rad und die Welle bewegen, und den Strick mit der Last aufwinden. Öfters wird auch anstaat diesem eine Welle mit einem oder mehrern eisernen Stiernrädern D und Getrieben oder mit einer Schraube ohne Ende C versehen. Die Berechnung des Verhältnisses der Kraft zur Last hat sich alsdenn auch nach der eigentlichen Einrichtung der Machine zu richten. Das Gestel wird ebensals, nachdem es gros oder stark sein sol, auf verschiedene Art angeordnet. Man hat aber dabei hauptsächlich zu sehen, daß der Balken AB stark genug seie, gehörig unterstüßet werde, und daß sich die geradstehende Saule, woran eigentlich das ganze Bauwerke der Machine befestiget wird, auf ihren Zapfen I und L bequem und so weit herum drähen lasse, als die Umstände erfordern. Fig. 100.

Von dem sogenanten Hebel von Garuß.

§. 302. Jene Machine, so unter dem Namen als Hebel von Garuß bekant ist, kan nicht minder zur vorteilhaften Bewegung schwerer Lasten in einigen Fällen mit Nußen angewendet werden.

Fig. 101. Es bestehet aber derselbe hauptsächlich aus einer Welle A, worauf sich der Strick mit der Last aufwindet; aus einem an eben dieselbe befestigten Sternrade B, dessen Zähne wie die an einem Sper oder Stelrade nach einer Seite zu schief eingeschnitten sind; aus einer Hebelstange CD die sich um den Ruhepunkt O bewegen läst, und an deren beiden Enden die bewegende Kraft angebracht wird; und aus zween eisernen Hacken am, und dn, die auf beiden Seiten des Ruhepunkts O an der Hebelstange dergestalt befestiget sind, daß sie sich an derselben frei herum bewegen kön en; ihre untere Ende m und n liegen dergestalt auf dem Rade auf, daß, wenn die Hebelstange auf und nieder beweget wird, und mit ihren Enden die Bögen Cl und DG beschreibet, einer derselben immer wechselweise über einige Zähne hinab glitschet, indem der andere in einen Zahn eingreifet, und das Rad eben soweit nach sich ziehet, als der andere geglitschet ist, folglich die Last an der Welle einen gewissen Teil aufgewunden wird. Das Rad wird gemeiniglich nur aus über das Kreuz gelegten und übereinander genagelten Brettern zusammengesezt, und zwischen derselben äussern Rande ein etwas breiter eiserner Zirkel, in welchen die Zähne eingeschnitten sind, dergestalt eingelassen, daß nur die Zähne allein vorstehen. Das übrige vom Gestelle ist meistens willkührlich, und richtet sich nach den Umständen.

Damit aber die an beiden Enden der Hebelstange angebrachten Kräfte mit gleicher Gewalt würken können, so ist überhaupt folgendes zu beobachten. 1ten: Erwählet die zween Zähne f und g, in welche ihr die Hacken eingreifen lassen wollet, wenn die Hebelstange sich eben im horizontalen Stande EF befindet; nur mit der Vorsicht, daß ihr f nicht unter der horizontal mA sezet, weil der Hacken durch sein eigen Gewicht

nicht

nicht mehr leicht von sich selbst in die Zähne einfallen würde; und daß g so viele Zähne von f aufwärts angenommen werde, daß ein Hacken dem andern im abglitschen nicht hindere. 2ten: Ziehet die Radien fA und gA, und fället auf dieselben aus f und g die Perpendikularen fh und gp, so werden diese die Richtungslinien, nach welchen die beiden Hacken würken, vorstellen; nicht minder errichtet auch auf LN eine Perpendikular lr, so durch den Mittelpunkt des Rades oder der Welle gehet. 3ten: Erwählet nun nach einer beliebigen Art auf lr einen Punkt O, der eben eine solche Lage hat, daß die von demselben auf die Richtungslinien fh und gp gezogenen Perpendikularen Ob und Oc von gleicher Länge werden, und ziehet EF durch O parallel zu LN; so wird EF den horizontalen Stand der Hebelstange; O die Stelle ihres Ruhepunkts; die Durchschnitspunkten i und e von EF, fh und gp die Entfernung, in welchen beide Hacken von dem Ruhepunkt O an der Hebelstange befestiget müssen werden, damit die an beiden Enden angebrachte Kraft mit gleicher Leichtigkeit arbeiten könne; anzeigen.

Um nun auch noch zu wissen, wie groß die Kraft sein mus, welche an die Ende der Hebelstange angebracht mit einer gewissen an dem Strick sich um die Welle aufwindenden Last im Gleichgewicht stehet, so betrachtet, daß die an einen Zahne des Rades würkende Kraft zu der sich an der Welle aufwindenden Last: wie As : Af seie. §. 231. ferner da der Hebel EO oder FO von der zwoten Art ist, §. 211. und die Last schief in denselben würket, daß die an das Ende des Hebels angebrachte Kraft zu der an einen der Hacken würkenden Last wie Ob : EO oder wie Oc : FO seie. §. 224. Derowegen also ist $P : Q = As \times Ob : Af \times EO$, oder $P : Q = As \times Oc : Af \times FO$.

D. i.

D. i. die an einem Ende der Hebelstange angebrachte Kraft verhält sich zu der an der Welle sich aufwindenden Last, wie das Produkt aus dem Radius der Welle und der Perpendikular, so aus dem Ruhepunkt des Hebels auf die Richtungslinie eines Hackens gezogen wird, zum Produkt aus dem Radius des Rades und der Länge des Hebelarms.

Diese Machine läst sich zwar zur Aufhebung oder Bewegung schwerer Lasten anwenden, sie hat aber die wesentliche Unbequemlichkeit an sich, daß ein bereits aufgehobene, und an dem Strick hangende Last nicht wieder zurückgelassen werden kan ohne mit der Hand einen Hacken nach dem andern immer fort aus den Zähnen des Rades zu heben. Um also dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, ist durch einen Tischlermeister in Jnspruck, dessen Namen mir unbekant, folgende Verbesserung erdacht worden.

Fig. 102. Das Rad und die Welle verbleiben unverändert, und die Ruhepunkten O, e, i, der Hebelstange, und der beiden Hacken werden wie zuvor bestimt. Die Hebelstange ist hier auf einer Seite abgenommen, weil man, wenn man wil, die Kraft auch nur auf einer Seite anbringen, und würken lassen kan.

Die beiden Eisenstangen pg, und ef, welche in der vorigen Figur als Hacken in die Zähne des Rades eingreifen, und es nach sich ziehen, greifen hier auf der andern Seite in dieselben ein, und schieben im Aufziehen das Rad von sich; aus dieser Ursache könte man sie zum Unterschied von den vorigen eigentlich Schiebstangen nennen; wiewohl ihre Würkung im übrigen von den andern nicht

unter-

unterschieden ist. Damit sich aber diese Schiebstangen beim zurücklassen der Last wechselweise selbst auslösen, so werden sie über i und e hinaus etwas verlängert, und an iede ein Gewicht a und b von erforderlicher Schwere angebracht, welches mit einem beweglichen Gliede versehen wird, damit man sie auch in die Stellung d und c hinüber legen kan. Ferner sind zwo Federn und zwar eine n an der Hebelstange, die andere m aber an einem von einer schrähen Stütze zur andern angebrachten Querbalken dergestalt befestiget, daß sie mit ihren äussern Enden die Schiebstangen damals wenn die Hebelstange im horizontalen Stande OF ist, noch nicht gar berühren.

Ist nun mittelst einer solcher Gestalt eingerichten Machine eine Last aufzuheben, oder über eine horizontale oder schiefe Fläche herbei zu ziehen, so werden beide Gewichter in die Stellung a und b geleget, und die Hebelstange in Bewegung gebracht, damit ihr Ende wechselweise den Bogen DG beschreibe; so werden beide Schiebstangen das Rad wie in der vorigen Machine herum bewegen, und andurch der Strick an der Welle aufgewunden werden; nur wird die Kraft in diesem Falle auch noch den Widerstand der Federn, wenn sie nehmlich von den Schiebstangen berühret werden, und solche noch mehr gegen die Zähne drücken, zu überwältigen haben; weil aber diese Federn nicht stärker sein dörfen, als daß sie den Widerstand der Gewichter a und b überwinden können, so wird die Kraft durch sie gar nicht beträchtlich gehindert werden. Sol aber die bereits gehobene Last wieder nachgelassen werden, so sind die Gewichter in die Stellung d und c zu brin-

 gen.

gen. Die Hebelstange wird alsdenn von F gegen G etwas weniges beweget, damit die Schiebstange gp durch das Gewicht d das Ubergewicht bei p bekomme, und sich dadurch selbst aus den Zähnen löse. Bewegt man alsdenn den Hebel aufwärts gegen D, so wird die Schiebstange fb mit in die Höhe gezogen, der Zahn, worein sie eben greifet, folget ihr nach, daß Rad bewegt sich also auch mit samt der Welle herum, und dadurch wird der Strick abgewunden, und die Last nachgelassen. Indessen gehet die andere Schiebstange gp ler, bis sie, da die Hebelstange schon gegen D komt, durch die Feder m wieder in die Zähne gedruckt wird; wo aber die andere fc zu gleicher Zeit durch das Gewicht c das Ubergewicht bekomt, sich aus den Zähnen löset, und währender Bewegung der Hebelstange von D gegen G ler gehet, indem die andere gp damals in die Zähne eingreifet, ihr das Rad nachfolget, und solchergestalt die Last wie zuvor ferner nachgelassen wird. u. s. w.

Ubrigens wird der Hebel von Garuß gewöhnlicher Weise auch bei Bretermühlen gebraucht, um das Gestel, worauf die Bäume, welche in Bretter zerschniten werden sollen liegen, nach und nach an die Säge anzurücken.



Drittes Hauptstück.

Von der Reibung der Machinen.

Von der Reibung überhaupt.

Erklärung.

§. 303. Die Erfahrung lehret, daß sich kein Körper so volkommen eben und glat machen lasse, daß nicht an seinen Flächen noch eine menge Ungleichheiten, d. i. Erhöhungen oder Vertiefungen vorhanden wären. Man erhält davon die überzeigendsten Proben, wenn man Körper, die am glatesten zu sein scheinen, mit Vergrösserungsgläsern betrachtet. Es ist daher leicht begreiflich, daß zween Körper, die sich mit ihrem Flächen berühren, und übereinander hinweg beweget werden, einen gewissen besondern Widerstand verursachen, weil sich die an der Fläche herfürragende Teile des einen in die Vertiefungen der Fläche des andern hinein setzen, und nicht eher über einander hinweg gezogen werden können, bis die erstere nicht über die letztere heraus und folglich etwas in die Höhe steigen, oder die vorragenden Teile niedergebogen, oder gar abgebrochen oder ausgerissen werden. Dieser daher rührende Widerstand wird insgemein die Reibung genent.

Zusatz.

§. 304. Die Grösse der Reibung ist in verschiedenen Körpern, und in verschiedenen Umständen oft verschieden, und hanget hauptsächlich von folgenden ab:

1. Von der mehrern oder wenigern Unebenheit der sich berührenden Flächen.

2. Von der Grösse des Drucks, welchen die sich berührenden Flächen von der darauf ruhenden Last auszustehen haben.

3. Von der Grösse der sich berührenden Flächen, aber nur in dem Falle, wenn dieselben so genau aufeinander liegen, daß keine Luft dazwischen ist, und also der Druck unsers Dunstkreises (Athmosphæra) in Betrachtung komt.

4. Von der Geschwindigkeit, mit welcher die Bewegung geschihet.

5. Von der Näße und Trockenheit der sich reibenden Flächen.

6. Endlich von der Beschaffenheit der Materien selbst; d. i. von ihrer Härte oder Weiche, Biegsamkeit oder Spröte.

Da diese Umstände in den Körpern sehr verschieden angetroffen werden, und auch für sich sehr veränderlich sind, so ist leicht zu erachten, daß sich in Ansehung der Grösse der Reibung nichts algemeines festsetzen lasse. Um aber die Anfänger dennoch einiger Massen in Stande zu setzen die an den Machinen vorfallenden Reibungen beurteilen zu können, so geben wir ihnen folgende kurze Anleitung.

Aufgabe.

§. 305. Wie die Grösse der Reibung eines auf einer Fläche liegenden Körpers durch die Erfahrung zu bestimmen.

Auf-

Auflösung: 1. Richtet die Fläche, AB mit welcher ihr den Versuch machen wollet, so ein, daß ihr sie mit dem Horizont AC verschiedentlich und nach Belieben schief stellen könnet, und stellet den vorhabenden Körper L mit einer seiner Flächen darauf. Fig. 103.

2. Erhebet die Fläche an einem Ende B nach und nach eben so hoch, bis der Körper L von sich selbst hinab zu glitschen anfangt.

3. Messet hierauf die Länge AB und auch die Höhe BC der schiefen Fläche, und saget: wie sich die Länge AB der schiefen Fläche zur Höhe BC verhält, eben so verhält sich die ungebundene Schwere des Körpers L zu der Reibung, welche durch seine Bewegung auf der Fläche entstehet.

Beweis: Bildet euch ein, als ob aus dem Schwerpunkt D des Körpers eine Perpendikular DE auf AC, und eine andere DF auf AB gezogen, und DG und EF parallel zu AB, GE aber parallel zu DF geführet wäre. Druckt man nun durch die senkrechte Linie DE die ungebundene Schwere des Körpers aus, so läßt sich durch die Linie DF der Druck, welchen er gegen die schiefe Fläche ausübet, vorstellen; und DG zeiget alsdenn die gebundene Schwere, oder iene Kraft an, mit welcher der Körper über die schiefe Fläche herab zu glitschen anfangt. Es kan aber derselbe bei der Erhebung der Fläche nicht eher zu glitschen anfangen, bis nicht seine gebundene Schwere DG der auf der Fläche entstehenden Reibung zum wenigsten gleich wird, und damals kan man DG für die Grösse der Reibung selbst annehmen. Nun aber ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecken EDG und ABC.

$$AB : BC = DE : DG$$
$$AB : AC = DE : EG$$
und $$AC : BC = EG : DG.$$

 Dar-

Daraus erhellet also, daß, wenn man die Länge AB die Höhe BC und die Grundlinie AC der schiefliegenden Fläche worüber der Körper eben herab zu glitschen anfangt, nebst der ungebundenen Schwere des Körpers bekant hat, man sowohl die Grösse seiner Reibung DG $= \frac{BC \times DE}{AB}$ oder DG $= \frac{BC \times EG}{AC}$, als die Grösse des Druckes EG $= \frac{AC \times DE}{AB}$, welchen er gegen die schiefe Fläche ausübet finden könne.

Zusaz.

§. 306. Ist die Schwere eines Körpers DE nebst der Grösse der Reibung DG auf einer Fläche einmal bekant, und man verlangt zu wissen, welchen Winkel die schiefe Fläche mit dem Horizont machen müsse, damit der Körper hinab zu glitschen eben bereit seie, so sezet

DE : DG = Sin tot : Sin DEG = BAC,

oder wäre das Verhältnis der Reibung zu dem Druck gegen die Fläche gegeben, so wäre

EG : DG = Sin tot : tang GED = BAC.

Zusaz.

§. 307. So wie der Winkel BAC spiziger gemacht wird, oder die Fläche AB sich der Horizontal AC mehr nähert, so wird auch der Druck DF = GE gegen die schiefe Fläche grösser, oder nähert sich der ungebundenen Schwere des Körpers; und wird endlich die Fläche AB ganz horizontal gestelt, so ist der Druck gegen dieselbe der ungebundenen Schwere selbst gleich. Was man also für ein Verhältnis der Reibung zum Druck gegen die Fläche bei der schiefen Stellung der Fläche, bei welcher der Körper hinab zu glitschen anfängt, gefunden hat, eben dieses wird nun

auch

auch bei der horizontalen Stellung staat haben: D. i. hat die Reibung in der schiefen Stellung, in welcher der Körper eben hinab zu glitschen anfangt, z. B. $\frac{1}{4}$ von dem Druck EC betragen, so wird nun die Reibung in der horizontalen Stellung $\frac{1}{4}$ von der ungebundenen Schwere ausmachen.

Übrigens lehret die Erfahrung, daß die Grösse der Reibung bei den meisten Körpern oder Materien, welche gewöhnlicher weise zu Machinen gebraucht werden, wenn sie nicht besonders wohl pollirt sind, fast allezeit bei nahe ein Drittel ihres Drucks gegen die Fläche betrage. Daher man auch diese Verhältnis in den Berechnungen der Reibung gemeiniglich annimt.

Aufgabe.

§. 308. Wie die Kraft zu berechnen, welche erfordert wird, eine auf einer horizontalen Ebene ruhende Last in Bewegung zu setzen?

Auflösung: Wenn eine Last L auf einer horizontalen Fläche GH ruhet, und eine Kraft K dieselbe nach einer zu dem Horizont parallelen Richtung zu bewegen suchet, so hat dieselbe hier nichts als die Reibung allein zu überwinden. Da nun dieselbe nach §. 307. dem dritten Teil der Last ausmachet, so mus auch K $= \frac{L}{3}$ sein, wenn sie das Gleichgewicht halten, und so sie ein wenig vermehrt wird, die Last in Bewegung setzen können sol. Fig. 104.

Zusaz.

§. 309. Da §. 304. gesagt worden, daß die Reibung hauptsächlich von dem Druck, den die Flächen aus-

auszustehen haben, und nicht von der Grösse der Flächen abhanget, wenn nicht etwann dasienige, was ebendaselbst Nr. 3. gemeldet worden, staat findet; so ist es einerlei, ob der Körper mit der grössern Fläche ABDC oder kleinern ABFE auf der untern Fläche aufliege; weil die wenigere Punkten der kleinern Fläche um so stärker gegen die untere Fläche gedruckt werden, und daher eben soviel Widerstand als die mehrere der grössern Fläche verursachen.

Aufgabe.

§. 310. Wie die Kraft zu berechnen, welche sowohl der Schwere einer vertikalen Fläche, als auch der durch einen Seitendruck entstehenden Reibung das Gleichgewicht halten sol?

Fig. 105. Auflösung: Wenn eine schwere vertikal stehende Fläche L an eine andere Fläche durch eine Kraft P perpendikular angedruckt wird, so hat die Kraft K so das Gleichgewicht halten sol, nicht allein die Schwere L sondern auch die von dem Druck P herrührende Reibung zu überwinden, ist nun das Verhältnis der Reibung zu dem Drucke bekant, oder durch die Erfahrung bestimmt, und z. B. $= \frac{P}{3}$, so ist $K = L + \frac{P}{3}$.

Aufgabe.

§. 311. Wie die Kraft zu berechnen, welche einen Körper zwischen zwo parallelen Flächen heraus ziehen, und folglich die daher entstehende Reibung überwinden sol?

Fig. 106. Auflösung: Wenn ein Körper L von einer Kraft K zwischen den zwo parallelen Flächen A und D hervorgezogen werden sol, so daß die Obere wegen der

dar-

daraufruhenden Last B und A zugleich auf ihn drucket, so entstehen zwo Reibungen die von der Kraft K zu überwinden sind; und zwar ist die untere Reibung wenn wir sie wie §. 307. gemeldet worden, für ein Drittel des Drucks annehmen, $\frac{L+A+B}{3}$ und die obere $= \frac{A+B}{3}$, weil nun die Kraft nichts als diese zu überwinden hat, so ist $K = \frac{L+2A+2B}{3}$

Aufgabe.

§. 312. Wie die Reibung zu berechnen, wenn ein Körper an einem Hebel auf einer horizontalen Fläche in die Runde herum bewegt werden sol?

Auflösung: Wenn eine Last L an dem Ende A eines Hebels, und eine Kraft K an dem andern Ende B angebracht ist, welche die erstere auf einer horizontalen Fläche um den Ruhepunkt C bewegen sol, so hat man um die Reibung zu bestimmen, nicht allein auf den Druck der Last gegen die Fläche, sondern auch auf die Geschwindigkeit, so die Kraft und Last gegen einander haben, oder vielmehr auf die Länge ihrer Hebelsarme zu sehen; denn so wie die Kraft sich geschwinder oder langsamer als die Last beweget, oder so wie der Hebelarm CB derselben länger oder kürzer als der andere AC ist, so wird auch die Kraft das für die Reibung gewöhnlich gerechnete Drittel des Drucks der Last leichter oder schwerer überwinden, und man kan setzen, daß Fig. 107.

$$CB : AC = \frac{L}{3} : \frac{AC \times L}{3CB} \text{ seie;}$$

wovon der letzte Satz die Kraft ausdruckt, welche erforderlich ist, dem Körper L zu bewegen.

Aufgabe.

§. 313. Wie die Grösse der Reibung zu berechnen, wenn ein Cylinder mit seiner Grundfläche auf einer horizontalen Fläche lieget, und durch Hülfe einer Kurbel um seine Achse in die Runde bewegt wird?

Fig. 108. Auflösung: Betrachtet, daß die verschiedenen Teile des Cylinders L bei seiner Herumdrähung eine grössere oder kleinere Geschwindigkeit erhalten, nachdem der Radius des Umkreises, den sie im Umlaufen beschreiben, grösser oder kleiner ist; folglich daß die Reibung dieser Teilen auch stärker oder schwächer sein müsse, und daß die mittlere Proportional dieser verschiedenen Geschwindigkeiten oder Reibungen auf den Umkreis fallen, der mit einem Radius $CR = \frac{2AC}{3}$ beschrieben wird. Alsdenn ist es eben soviel, als wenn die ganze Last L an das Ende R des Hebels RB, die Kraft K aber an das andere Ende B angebracht wäre, und die Bewegung damit in die Runde geschähe, §. 312. folglich wenn man die Reibung des Cylinders gegen die Fläche wie meistens gewöhnlich für $\frac{1}{3}$ seiner Schwere annimt, so ist:

$$CB : CR = \frac{L}{3} : \frac{CR \times L}{3CB},$$

wovon der letzte Satz iene Kraft ausdrückt, welche zur Uberwindung der Reibung erfordert wird.

Aufgabe.

§. 314. Wie die Reibung des untern Zapfens eines senkrecht stehenden Welbaums zu berechnen.

Auf-

Auflösung: Betrachtet, daß die Reibung des Zapfens an der untern Pfanne von dem Drucke, oder der Schwere des Welbaumes herrühre, und daß es eben soviel seie, als ob ein Cylinder, dessen Radius dem Radius TO des Zapfens gleich ist, wie §. 313. durch die Kurbel oder durch die an den Hebel angebrachte Kraft K in die Runde bewegt würde. Da nun die sich reibende Teile der Last ebenfals eine grössere oder kleinere Geschwindigkeit und folglich auch Reibung erhalten, nachdem sie mehr oder weniger von dem Mittelpunkt O entfernet sind, so kan man hier ebenfals die mittlere proportional Grösse der Reibung durch $\frac{2TO}{3}$ ausdrücken, und wenn man also sezet: Fig. 109.

$$CA : \frac{2TO}{3} = \frac{L}{3} : \frac{2TO \times L}{9CA},$$

so drückt der lezte Saz die Kraft aus, welche der Reibung das Gleichgewicht halten kan.

Aufgabe.

§. 315. Wie die Reibung an den Lagerzapfen eines Wagebalkens zu finden?

Auflösung: Wenn an den Enden eines gleicharmigten Wagebalkens gleiche Läste L und L angehangen werden, so werden die Zapfen oder der Ruhepunkt C nicht allein durch die beide Läste, sondern auch noch von der Schwere m des Wagebalkens gedruckt, und die beide Läste erhalten sich im Gleichgewicht. Wenn aber dieses durch Anhängung einer neuen Last K auf einer Seite überwunden werden sol, so mus dieselbe die an den Zapfen entstehende Reibung übewinden können. Hätten nun die Teile an der sich reibenden Fläche der Zapfen die nehmliche Geschwindigkeit, wie Fig. 110.

die

die am Ende des Wagebalkens angebrachte Last, so würde man auch den so vielten Teil des Drucks annehmen müssen, als dieselbe nach §. 307. betraget; weil aber die Geschwindigkeit der Last am Ende des Balkens zur Geschwindigkeit der sich reibenden Teilen wie CB : DC verhält, so verhält sich die Grösse der Reibung zur Last K, welche sie überwinden sol, eben so, d. i. wenn man z. B. die Grösse der Reibung $= \frac{L + L + m}{3}$ annimt, so ist

$$CB : DC = \frac{L + L + m}{3} : K = \frac{(2L + m) \times DC}{3CB}.$$

Zusatz.

Fig. 111. §. 316. Wären die Aerme AC und CB des Wagebalkens von ungleicher Länge, so würden auch die zwei angehangenen Läste L und N ungleich sein müssen, wenn sie sich das Gleichgewicht halten sollen, nimt man nun für die an den Zapfen fürfallende Reibung ebenfals wieder $\frac{1}{3}$ des Druckes auf dieselben an, so ist eben wie zuvor

$$CB : DC = \frac{L + N + m}{3} : K = \frac{(L + N + m) \times DC}{3CB}$$

der Kraft, welche zu N hinzugethan, die Reibung zu überwinden im Stande ist.

Aufgabe.

§. 317. Wie die Reibung zu berechnen, wenn die Zapfen einer stehenden Spindel nebst dem Druck auf den untern Zapfen, auch noch einen Seitendruck leiden?

Fig. 112. Auflösung: Wenn an einer senkrecht stehenden Welle ein Strick einige male umgewunden, und an beide Ende desselben zwo gleiche Läste L und L dergestalt

stalt angebracht werden, daß sie beide nach einer Seite parallel ziehen, so gehen an den Zapfen der Welle eigentlich zwoerlei Reibungen vor; nehmlich erstlich an den Seitenflächen der Zapfen, nach welchen die zwo Läste ziehen; zweitens an dem Grund der Pfanne, wo der untere Zapfen aufruhet, und von der Schwere m der Welle gedruckt wird. Um die erste Reibung zu finden, hat man die Welle als einen gleicharmigten Hebel oder Wagebalken zu betrachten, und folglich die Rechnung wie §. 315. anzustellen, doch ohne auf die Schwere der Welle zu sehen; und um die zwote Reibung zu bestimmen, hat man sich an das zu erinnern, was §. 314. gesagt worden. Setzen wir nun diesem zu folge voraus, daß z. B. die Reibung in beiden Fällen wieder $\frac{1}{3}$ des Drucks betrage, so ist für die erste $BF : CD = \frac{L+L}{3} : K = \frac{(L+L) \times CD}{3BF}$

und für die andere

$$BF : \frac{2CD}{3} = \frac{m}{3} : O = \frac{2CD \times m}{9BF}$$

folglich wird die ganze Kraft, welche einer der beiden Lästen L noch hinzugefüget werden mus, um der ganzen Reibung das Gleichgewicht zu halten $= K + O$ $= \frac{L \times CD}{BF} + \frac{2CD \times m}{9BF}$ sein.

Aufgabe.

§. 318. Wie die Reibung an einem Haspel, oder Rad an der Welle zu berechnen?

Auflösung: Um die Reibung eines Haspels oder Rad an der Welle zu berechnen, hat man erstlich zu betrachten, ob er horizontal oder vertikal stehet, und wie die Kraft und Last daran würken. Ist er horizon-

zontal, und sowohl die Last als Kraft würken abwärts und unter sich parallel, so hat man bei der Berechnung der Reibung alles das zu beobachten, was §. 316. erineret worden ist. Ist es aber ein stehender Haspel, und sowohl die Last als Kraft drucken die Welle nach einer Seite, so hat man sich sowohl an §. 317. als 316. zu halten.

Aufgabe.

§. 319. Wie die Reibung an den Achsen einer unbeweglichen Flaschenscheibe zu berechnen?

Fig. 113. Auflösung: Man hat sich bei der Berechnung der Reibung, welche an den Zapfen oder Achsen einer unbeweglichen Flaschenscheibe vorgehet, überhaupt wie bei einem gleicharmigten Wagebalken zu benehmen §. 315. D. i. wenn L und L die zwo gleiche Läste sind, welche über die Rolle hangen, m die Schwere der Rolle selbst, K dieienige Kraft ist, welche der Reibung das Gleichgewicht halten sol, und man nimt wieder an, daß die Grösse der Reibung $\frac{1}{3}$ des Drucks, mit welchen die Achse beschweret wird, betrage, so ist:

$$AC : CD = \frac{L + L + m}{3} : K = \frac{(2L + m) \times CD}{3AC}.$$

Aufgabe.

§. 320. Wie die Reibung an einer beweglichen Flaschenscheibe, an welcher die Richtungen der Kraft und Last parallel laufen, zu berechnen?

Fig. 114. Auflösung: Betrachtet, daß der ganze Druck gegen die Achsen der Last L mehr der Schwere m der Rolle gleich seie, und daß hier die Kraft und Last an einem Hebel der zwoten Art angebracht seie. Derowegen ist erstlich wegen dem blossen Stand des Gleichge-

gewichts und ohne Betrachtung der Reibung, wenn CD der Radius der Achse der Rolle ist:

$$AB : AC = L : N = \frac{L \times AC}{AB}$$

und dann

$$AB : CD = \frac{L + m}{3} : K = \frac{(L + m) \times CD}{3AB}$$

nach §. 316., folglich mus

$$N + K = \frac{L \times AC}{AB} + \frac{(L + m) \times CD}{3AB}$$

sein, um sowohl der Last L als der an den Achsen der Flaschenscheiben entstehenden Reibung das Gleichgewicht zu halten.

Aufgabe.

§. 321. Wie die Reibung zu berechnen, welche an den Achsen und Naben der Räder eines Wagens vorgehet, wenn er auf einer horizontalen Ebene in paralleler Richtung zu derselben fortgezogen wird.

Auflösung: Betrachtet, daß bei Fortziehung eines Wagens auf einer horizontalen Ebene weiter nichts als die Reibung an den Achsen zu überwinden seie; da aber die Räder Hebel vorstellen, an welchen in A und D die Kraft, in B und E aber die Last oder der Widerstand der Reibung angebracht ist, und C und F die Ruhepunkten sind, so wird die Uberwindung der Reibung dadurch ungemein erleichtert. Nimt man nun an, daß die Last L auf den vordern und hintern Rädern gleich ausgeteilet seie, und das die Reibung hier eben wieder $\frac{1}{3}$L betrage, so kan man dieselbe in zween gleiche Teile teilen, und also $\frac{1}{6}$L für die Reibung der vordern und $\frac{1}{6}$L für eben dieselbe der hintern Räder annehmen, und erstlich setzen: Fig. 115.

AC:

$$AC : BC = \frac{L}{6} : \frac{K}{2} = \frac{L \times BC}{6AC}$$

und dann $DF : EF = \frac{L}{6} : \frac{K}{2} = \frac{L \times EF}{6DF}$

folglich wird $K = \frac{L \times BC}{6AC} + \frac{L \times EF}{6DF}$

die Kraft sein, welche eben im Stande ist der Reibung das Gleichgewicht zu halten.

Daraus ist also zu ersehen, daß ein Wagen um so leichter zu bewegen seie, als er grössere Räder, oder kleinere Achsen hat. Ist aber die Fläche, worauf der Wagen bewegt werden sol, uneben, oder gar nicht horizontal, so wurde man auch die Berechnung der Kraft anders anstellen müssen, und sich überhaupt an dasienige zu halten haben, was wir von der Bewegung über schiefe Flächen §. 246. beigebracht haben, und noch folgen wird.

Aufgabe.

§. 322. Wie die Kraft zu berechnen, welche erfordert wird, wenn ein Körper über eine schiefe Fläche in paralleler Richtung zu derselben hinaufgezogen werden sol?

Fig. 116. Auflösung: Bildet euch ein, als ob aus dem Mittelpunkt L der Schwere des Körpers LD auf AH, und LS auf AB perpendikular gezogen wäre, und daß durch die Linie LS die ungebundene Last des Körpers ausgedruckt werde, so kan man, wenn FS parallel zu LD, und FL und DS parallel zu AH geführet wird, durch LD den Druck der Last gegen die schiefe Fläche, durch FL aber dieienige Kraft vorstellen, mit welcher

der

der Körper über die schiefe Fläche hinab zu glitschen suchen würde, wenn keine Reibung vorhanden wäre. Damit nun die nach der Richtung LK würkende Kraft K dem Körper eben das Gleichgewicht halten könne, mus sie der Kraft LF mehr der Reibung, so auf der Fläche entstehet, gleich sein; und um dieselbe zu finden, betrachtet, daß wegen der Aehnlichkeit der Dreiecken seie:

$$AH : HB = LS : LF$$

und $$AH : AB = LS : LD$$

folglich $$\frac{LS \times HB}{AH} = LF$$

und $$\frac{LS \times AB}{AH} = LD$$

nimt man nun hier ebenfals wie meistens gewöhnlich $\frac{1}{3}$ des Drucks der Last gegen die schiefe Fläche für die Reibung an, so ist

$$\frac{LS \times HB}{AH} + \frac{LS \times AB}{3AH} = K$$

der Kraft, welche vermögend ist, sowohl der Last L als ihrer Reibung auf der schiefen Fläche das Gleichgewicht zu halten.

Aufgabe.

§. 323. Wie die Kraft zu berechnen, so erfordert wird, wenn ein Körper über eine schiefe Fläche nach einer mit dem Horizont parallelen Richtung hinaufgezogen wird.

Auflösung: Bildet euch ein, daß die Parallelogrammen LFSD und LNOC dergestalt aus dem Schwerpunkt L des Körpers gezogen wären, daß LS perpendikular auf AB die ungebundene Schwere des Körpers; LD perpendikular auf AH, den Druck desselben gegen Fig. 117.

die schiefe Fläche; LF die Kraft, mit welcher der Körper noch über die schiefe Fläche hinabweichen würde, wenn keine Reibung vorhanden wäre; LC den Druck, welcher wegen der schiefen Würkung der Kraft K gegen die schiefe Fläche entstehet, und LN und LC die zusammengesetzten Kräften ausdrucken, in welche die Kraft LO durch das Parallelogram LNOC zerfället wird; und daß man wegen der Aehnlichkeit der Dreiecken setzen könne

$$AH : BH = LS : LF$$

und $AH : AB = LS : LD$

folglich ist $\frac{LS \times BH}{AH} = LF$ der Kraft, welche den Körper ohne Reibung zum hinabweichen antreibet, und $\frac{LS \times AB}{AH} = LD$ dem Druck, welchen der Körper durch seine Schwere auf der Fläche verursachet.

ferner ist $AH : AB = LO : LN$

und $AH : BH = LO : LC$

folglich ist $\frac{LO \times AB}{AH} = LN$

und $\frac{LO \times BH}{AH} = LC$

dem Drucke, welchen die Kraft K wegen ihrer schiefen Richtung gegen die Fläche AH verursachet.

Nimt man nun an, daß die Reibung, welche sowohl durch die Schwere des Körpers selbst, als durch die schiefe Richtung der Kraft K gegen die Fläche entstehet, $\frac{1}{3}$ des gesamten Drucks betrage, so bekomt man

$$\frac{LD + LC}{3} = \frac{LS \times AB}{3AH} + \frac{LO \times BH}{3AH}$$

für die gesamte Reibung.

Fer-

Ferner schliesset, daß, wenn der Körper L auf der schiefen Fläche AH sich aufwärts zu bewegen anfangen sol, die Kraft LN der Kraft LF mehr der gesamten Reibung gleich sein müsse. D. i., daß:

$$LN = LF + \frac{LS \times AB}{3AH} + \frac{LO \times BH}{3AH}$$ seie.

Sezet man nun anstaat den erstern zwo Grössen ihren oben gefundenen Wehrt, so ist:

$$\frac{LO \times AB}{AH} = \frac{LS \times BH}{AH} + \frac{LS \times AB}{3AH} + \frac{LO \times BH}{3AH}$$

oder

$$\frac{LO \times AB}{AH} - \frac{LO \times BH}{3AH} = \frac{LS \times BH}{AH} + \frac{LS \times AB}{3AH}$$

und nach Hinweglassung der gleichen Divisoren

$$LO \times AB - \frac{LO \times BH}{3} = LS \times BH + \frac{LS \times AB}{3}$$

folglich $3LO \times AB - LO \times BH = 3LS \times BH + LS \times AB$

und endlich $LO = \frac{3LS \times BH + LS \times AB}{3AB - BH}$

der Kraft, welche sowohl der Last, als der Reibung das Gleichgewicht halten kan.

Aufgabe.

§. 324. Wie die Kraft zu berechnen, welche erfordert wird, einer an einer Schraube hangenden Last sowohl als der in den Schraubengängen entstehenden Reibung das Gleichgewicht zu halten?

Auflösung: Wenn wir annehmen, daß die an die Schraubenmutter angebrachte Last L an der senkrecht stehenden Spindel DE durch Umdrähung der erstern in die Höhe bewegt werden sol, so betrachtet, daß es einerlei seie, ob die Last durch die Schraubenmutter ohne Fig. 118.

Umdrähung des Hebels und nur durch eine in N angebrachte Kraft, oder durch eine zum Horizont parallele Kraft über eine schiefe Fläche AH, wovon AB dem Umkreis der Schraube, welcher mit einem Radius CN aus dem Mittel C bis auf die Mitte eines vorstehenden Schraubenganges gezogen ist, und HB der Höhe NM eines Schraubenganges gleich ist, in die Höhe gebracht wird. §. 323. Aus dieser Ursach wird also die bei N angebrachte Kraft, welche sowohl der Last als der Reibung das Gleichgewicht halten kan

$$= N = \frac{3L \times BH + L \times AB}{3AB - BH}$$ sein.

Weil aber gewöhnlicher weise zur Umdrähung der Schrauben, oder ihrer Mutter noch ein Hebel CF angewendet wird, um die am Ende F desselben angebrachte Kraft K noch mehr zu erleichtern, so ist vermög demselben $CF : CN = N : K$

folglich $\frac{CN \times N}{CF} = K$.

setzet man nun anstaat N seinen gefundenen Wehrt,

so ist $\frac{CN \times (3L \times BH + L \times AB)}{CF \times (3AB - BH)} = K$

der Kraft, welche sowohl der Last L als der an den Schraubengängen vorfallenden Reibung das Gleichgewicht zu halten vermag.

Die engen Gränzen, welche diesen Anfangsgründen gesetzt sind, erlauben nicht, uns über diese Materie weiter auszudehnen. Es wird aber nicht schwer sein die gegebenen Regeln auf mehrere andere Fälle anzuwenden. Wer hierinnen weitern Unterricht verlangt, kan die Schriften von Belidor, Camus, Amonton, Bosut u. a. m. nachsehen.

Mit-

Mittel die Reibung an den Machinen zu vermindern.

§. 325. Obwohl sich die Reibung an den Machinen niemals gänzlich aufheben läst, so kan sie doch durch nachstehende Mittel um vieles vermindert werden.

1. Hat man soviel möglich Sorge zu tragen, daß sich nicht Materien von gleicher Beschaffenheit z. B. Eisen auf Eisen, Messing auf Messing, eine gewisse Art Holz auf einem andern von eben derselben reibe. Die Erfahrung lehret, daß sich Eisen auf Messing oder Metal, Stahl auf Zinn; hartes Holz auf Messing oder auch auf Holz von einer andern Art weniger reibe.

2. Soll man die sich reibenden Teile einer Machine so glat als möglich machen, und zu verhindern trachten, daß sich nicht fremde harte Körperchen als Sand oder Staub dazwischen setzen.

3. Läst sich die Reibung an allen Achsen oder Lagerzapfen leichter überwinden, wenn man sie von so kleinen Durchmesser anordnet, als die Schwere der Last, die sie zu tragen haben, und die Dauerhaftigkeit erlauben; und auch wenn man sie anstatt in Pfannen auf zwo neben einander liegende Rollen aufliegen läst.

4. Wird die Reibung an den Zähnen der Räder und an den Spindeln der Getrieben leichter überwältiget, erstlich ie mehrere Zähne und Spindeln sich an denselben befinden, und denn auch, wenn die äussersten Ende der Zähne in der Gestalt einer Cycloide abgerundet sind.

5. Wird die Reibung vermindert, wenn man die sich reibenden Teile mit schicklichen Materien schmieret. Die Erfahrung lehret, daß, wenn sich Holz auf Holz

reibet, man solches mit Wasserblei oder Reisblei oder auch mit Saifen bestreichen müsse. Eisen wird gewöhnlich mit Baumöhl oder Ochsenklaufet, Messing mit sehr weichen Wachs bestrichen. Zu grossen Machinen bedienet man sich auch der gemeinen Wagenschmiere, oder Schmere.

6. Wird die Reibung vermindert, wenn die gerade oder schleifende Bewegung einer Last in eine fortwälzende verwandelt wird, oder wenn Rollen oder Walzen unterlegt werden.

7. Wenn an einer Machine Stricke nöthig sind, sol man lieber schon etwas gebrauchte als ganz neue nehmen, weil die erstern mehr Biegsamkeit haben.

8. Um endlich überhaupt die Reibung so gering zu machen, als möglich ist, hat man nebst obigen Mitteln zu trachten, die Machinen so einfach als nur immer die Umstände erlauben, zu machen.

Ubrigens, so wie die Reibung an den Machinen oftmals sehr hinderlich und schädlich ist, so wird sie auch öfters nützlich und nothwendig; denn sie hemmet die alzugrosse Geschwindigkeit z. B. an einem gesperrten Wagenrade, oder in dem sogenanten Bremsrade. Sie ist die Ursache, daß die Dräheспindeln, Spulen, Schmier oder Riemräder sich umdrähen können. Das Feilen, Schleifen, Polliren u. d. g. geschihet einzig durch die Reibung.

Dritter Abschnitt.

Von dem Gleichgewicht und Druck der flüßigen Körper.

Erstes Hauptstück.

Von dem Gleichgewicht der flüßigen Körper, und ihrem Drucke gegen die Grund- und Seitenflächen der Gefäße, in welchen sie enthalten sind.

Erfahrung.

§. 326.

Wenn eine flüssige Materie in ein Gefäß gegossen wird, so setzet sich die Oberfläche derselben allezeit mit dem Horizont parallel, so bald sie still zu stehen anfangt.

Zusaz.

§. 327. Da alle Punkten einer wahren Horizontalfläche gleichweit von dem Mittelpunkt der Erde abstehen, und folglich einen Teil der Oberfläche einer Kugel ausmachen, die mit der Erde einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt hat, so sind auch alle Punkten der Oberfläche einer flüssigen und stillstehenden Materie gleichweit von dem Mittelpunkt der Erde entfernt, und

ein Teil der Oberfläche einer Kugel, die mit der Erde einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt hat.

Obschon dieses in kleinern Gefässen unmerklich ist, und die Oberfläche der flüssigen Materien in denselben ganz gerade zu sein scheinet, weil sie nur einen sehr kleinen Teil der Kugelfläche ausmachet; so ist doch die Runde der Oberfläche bei grossen Seen, oder an dem Weltmeere sehr merklich.

Obwohl die Oberfläche des Quecksilbers, und die des Wassers, wenn solches nehmlich in ein sehr trocknes oder staubiges Gefäß gegossen wird, sich gegen die Mitte etwas mehr aufthürmet, an den Wänden des Gefäses aber etwas niederer wird, so hindert doch dieses die Richtigkeit der angeführten Erfahrung nicht; weil dieses von einer andern Ursach; nehmlich von den stärkern Zusammenhang der flüssigen Materie mit den Wänden des Gefässes als mit seinen eigenen Teilchen herkomt.

Zusaz.

§. 328. Wenn also ein Teil der Oberfläche einer flüssigen Materie durch was immer für einen Zufal oder Ursache höher, oder weiter von dem Mittelpunkt der Erde als ein anderer entfernt ist, und von nichts gehindert wird, so wird er gegen den niedern so lange abfliessen, bis alle Teile in gleiche Höhe gekommen sind, oder bis die Oberfläche gänzlich horizontal wird.

Erfahrung.

Fig. 119. §. 329. Wenn ein Gefäß XY durch Wände AB, CD, EF auf was immer für Art abgeteilet ist, doch daß die Abteilungen durch die gelassenen Oefnungen ILS noch eine Gemeinschaft haben, und es wird eine

flüssi-

flüssige Materie in eine dieser Abteilungen gegossen, so steiget sie in allen auf gleiche Höhe.

Eben dieses ereignet sich, wenn verschiedene und an beiden Enden offene Röhren AB, CD, EF, GH u. s w. in ein mit einer flüssigen Materie angefültes Gefäß getauchet werden, die Röhren mögen was immer für eine Gestalt haben. Fig. 120.

Nur müssen diese Röhren nicht gar zu eng sein, und nicht den sogenanten Haarröhrgen gleichen; denn in diesen würde die flüssige Materie aus einer andern Ursache um ein merkliches höher als in dem Gefäse steigen.

Zusaz.

§. 330. Da also die flüssige Materie bei dem Eintauchen der Röhren sowohl durch die abwärts und aufwärts stehende Oefnungen B und F, als durch die ander Seite befindliche D und H eindringet, und in allen Röhren auf gleiche Höhe steiget, so ist zu schliessen, 1. daß dieselbe ihren Druck nicht allein abwärts, sondern auch aufwärts und nach allen Seiten gleich ausübe: 2. daß der Druck gegen diese Oefnungen um so grösser seie, als die Röhren tiefer eingetaucht werden; weil alsdenn die flüssige Materie in dem Gefäß eine grössere Saule derselben in der Röhre erhalten mus.

Lehrsaz.

§. 331. Wenn eine flüssige Materie von einerlei Schwere in untereinander Gemeinschaft habende Röhren gegossen wird, so steiget dieselbe in allen auf gleiche Höhe; die Röhren mögen eine gleiche oder ungleiche Weite haben, senkrecht oder schief, gerade oder gebogen sein.

Fig. 121. Beweis: Aus der §. 329. angeführten Erfahrung ist bekant, daß, wenn eine flüssige Materie in ein mit verschiedenen Wänden abgeteiltes Gefäß gegossen wird, dieselbe in allen Abteilungen, welche mit einander Gemeinschaft haben, auf gleiche Höhe steige; nun aber kan man die mit einander Gemeinschaft habende verschiedene Röhren Nr. 1. 2. 3. 4 als Gefäse ansehen, die durch Wände auf verschiedene Weise abgeteilet sind, also wird auch die flüssige Materie in denselben gleiche Höhen einnehmen; und da dieses in einem abgeteilten Gefäse geschihet, die Wände mögen was immer für eine Stellung haben, so mus es auch in den Röhren geschehen, sie mögen gleiche oder ungleiche Weite haben wie Nr. 1. 2. und 4; senkrecht wie Nr. 1 u. 2, oder schief wie Nr. 3 und 4, oder gerade wie Nr. 1 und 2, oder gebogen wie Nr. 4. sein.

Zusaz.

§. 332. Da also die flüssige Materie in Gemeinschaft habenden Röhren oder Gefäsen auf gleiche Höhe steiget, so mus auch der in der einen Röhre oder Teile des Gefäses befindliche Teil derselben dem in der andern das Gleichgewicht halten können, widrigenfals würde ein Teil den andern mehr drücken, folglich auf eine grössere Höhe treiben müssen, als er selbst hat. Daraus ist also zu schliessen, daß in solchen Röhren sowohl eine gleiche Saule EF der flüssigen Materie einer andern gleichen Saule GH, als eine kleinere IL einer grössern MN; eine gerade OP einer schiefen QR, und ein ungleichweite ST einer andern verschieden gebogenen VX das Gleichgewicht zu halten vermag, und dazu nur erforderlich seie, daß sie eine gleiche senkrechte Höhe haben.

Zusaz.

§. 333. Wird die flüssige Materie in der gleichweiten Röhre Nr. 1. von E bis A von einer Kraft niedergedruckt, so ist klar, daß sie in der andern Röhre, die mit ihr in gleicher Weite ist, um eben soviel daß, ist um GB steigen, und in beiden gleiche Geschwindigkeit in ihrer Bewegung erhalten müsse, wird aber die flüssige Materie in der ungleichweiten Röhre Nr. 2. von M bis C niedergedruckt, so mus sie in der engern Röhre von I nach D und zwar um soviel höher als CM steigen, als die Grundfläche der grössern Röhre grösser als die der kleinern ist; weil der Teil der flüssigen Materie, welcher aus dem Raume der grossen Röhre dessen Höhe MO ist, hinaus gedruckt wird, alsdenn nothwendig in der kleinern einen gleichen Raum einnimt. Da aber der Durchmesser in derselben kleiner ist, so mus dieser Abgang in der Höhe ersetzt werden. D. i. wenn n die kleinere und m die grössere Grundfläche ist, so ist $n : m = CM : DI$, und folglich

$$\frac{CM \times m}{n} = DI.$$

Derowegen werden sich auch die Geschwindigkeiten, die die flüssige Materie bei ihrer Bewegung in beiden Röhren erhält, wie die Höhen CM und DI, oder wie umgekehrt die Grundflächen verhalten.

Übrigens kan man hier noch merken, daß iene Art von Nivellir oder Wasserwagen, so aus zween aufrecht stehenden, und durch ein blechernes Rohr Gemeinschaft habenden gläsernen Cylindern bestehet, sich auf den Lehrsaz §. 331. gründen, weil sich das in dieselben gegossenen Wasser in beiden auf gleiche Höhe setzet, folglich der nach beiden Wasseroberflächen genommene Visierstrahl eine Horizontallinie vorstellet.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 334. Wenn zwo flüssige Materien in gleicher Menge, aber von verschiedener eigenthumlicher Schwere in gemeinschaftliche Röhren gegossen werden, so sind ihre Oberflächen ungleich hoch, und zwar wird die der leichtern Materie um so höher sein, als die der schwerern, als die eine leichter ist als die andere; die Röhren mögen eine gleiche oder ungleiche Weite haben, senkrecht oder schief, gerade oder gebogen sein.

Beweis: Sind die Röhren von gleicher Weite und senkrecht, so ist klar, daß zwo flüssige Materie von ungleicher Schwere nicht mit gleichen Vermögen gegen einander würken, oder sich das Gleichgewicht halten können; es wäre denn, daß man der ringern soviel an der Menge zusetzte, als ihr an der Schwere in Ansehung der schwerern Materie abgehet. Derowegen mus, wenn von beiden Materien eine gleiche Menge in die Röhren gegossen wird, die leichtere um so höher steigen als die schwerere, um wie viel sie von derselben an der eigenthümlichen Schwere übertroffen wird. Da aber die Grösse oder Gestalt der Röhren oder ihre verschiedene Stellung das Gleichgewicht nicht verhindern kan, §. 332. so hat dieser Lehrsatz auch bei allen Gestalten und Stellungen der Röhren seine Richtigkeit.

Zusatz.

§. 335. Zwo flüssige Materien von ungleicher Schwere halten sich also in gemeinschaftlichen Röhren das Gleichgewicht, wenn ihre Höhen in denselben mit ihren Schweren in umgekehrter Verhältnis stehen.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 336. Die horizontale Grundfläche eines gleichweiten Gefäses wird von der ganzen Schwere der darin enthaltenen flüssigen Materie gedruckt.

Beweis: Bildet euch ein, als ob die in dem Gefäse AE enthaltene flüssige Materie aus lauter unendlich dünnen und mit der Grundfläche CE parallel liegenden Elementen bestündte. Da ist nun gewis, daß das oberste Element mit seiner Schwere auf das zweite; dieses wieder mit seiner Schwere und zugleich mit der Schwere des ersten auf das Dritte drucke, folglich daß das unterste Element mit ihrer eigenen Schwere und mit der Schwere aller vorhergehenden Elementen die Grundfläche CE drucke. Die Schweren dieser Elementen aber machen zusammen die ganze Schwere der flüssigen Materie aus, also druckt die ganze Schwere der flüssigen Materie auf die Grundfläche eines gleichweiten Gefäses. Fig. 122.

Zusatz.

§. 337. Da gleiche Volumens von einer flüssigen Materie einerlei Art auch gleiche Schwere haben, oder die Schweren derselben sich wie ihre Volumens verhalten, die Volumens zweener Cylinder von gleicher Höhe AC und BD, und von ungleichen Durchmessern CE und FD, sich aber wie ihre Grundflächen verhalten, §. 284. Geomet. so stehen auch die Drucke, welche die Grundflächen dieser Cylinder von der in ihnen gleichhoch stehenden flüssigen Materie zu leiden haben, in gerader Verhältnis ihrer Grundflächen. Sind aber die Durchmesser FD gleich, oder die nehmliche, und die Höhen DG und DB verschieden, so sind ihre Volumens wie ihre Höhen §. 284. Geomet. folglich auch

der

der Druck der darin enthaltenen flüssigen Materie gegen die Grundfläche wie diese Höhen.

Sind aber sowohl die Durchmesser CE und FD als die Höhen AC und DG ungleich, so stehet der Druck der flüssigen Materie gegen die Grundflächen in einer zusammengesetzten geraden Verhältnis ihrer Höhen und Grundflächen.

Lehrsatz.

§. 338. Die horizontale Grundfläche eines ungleichweiten Gefäses von was immer für einer Gestalt, wird nicht von der ganzen Schwere des Volumens der enthaltenen flüssigen Materie gedruckt, sondern der Druck ist gleich der Schwere eines Volumens eben dieser Materie, welches mit dem Gefäse gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Fig. 123. **Beweis**: Wenn das Gefäß AIBF unten weiter als oben ist, so bildet euch ein, als ob anstaat der Grundfläche AF eine gemeinschaftliche Röhre AMH von gleichen Durchmesser AF angefüget, und mit einer flüssigen Materie angefüllet wäre, so ist gewis, daß dieselbe in beiden Aermen gleichhoch steigen, und die Schwere des Volumens in AIBF der Schwere des Volumens in ECHL das Gleichgewicht halten würde §. 331 und 332. indem der untere Teil AML der flüssigen Materie zu Erhaltung des Gleichgewichts nichts beitragt. Wenn nun diese Röhre bei AF mit einer mathematischen Fläche horizontal durchschnitten wäre, so ist klar, daß dieselbe von der Schwere des Volumens ECHL mittelbar durch die in LMA befindliche, und zum Druck nichts als die Fortsetzung beitragende flüssige Materie eben soviel aufwärts, als von der Schwere des Volumens AIBF abwärts gedrukt würde.

Wenn

Wenn das Gefäß AIBF im andern Falle unten enger als oben wäre, so bildet euch abermal ein, daß anstaat der Grundfläche AF desselben eine gemeinschaftliche Röhre AMH von gleichen Durchmesser AF angefüget, und mit flüssiger Materie erfüllet wäre; so wird dieselbe in beiden Aermen ebenfals gleichhoch steigen, und die Schwere des Volumens in ECHL der Schwere des Volumens in AIBF das Gleichgewicht zu halten vermögen §. 331 und 332.; nicht minder wird die bei AF angebrachte mathematische Fläche von beiden Volumens von einem soviel aufwärts als von dem andern abwärts gedruckt werden. Fig. 124.

Da nun aber der Druck gegen die Grundfläche AF in beiden Fällen der Schwere des Volumens ECHL gleich ist, und dieses Volumen im ersten Falle grösser als das Volumen AIBF des Gefäses, in andern aber kleiner ist, so ist auch der Druck gegen die Grundflächen ungleichweiter Gefäsen nicht der Schwere des Volumens der in denselben enthaltenen flüssigen Materie gleich, da ferner in beiden Fällen der Druck gegen die Grundflächen AF der Schwere des Volumens ECHL gleich ist, und die Schweren gleichartiger Materien sich wie ihre Volumens verhalten, so kan man die Schwere oder den Druck durch das Volumen ECHL selbst ausdrucken. Nun aber hat dieses Volumen in beiden Fällen mit dem Gefäse gleiche Grundfläche und Höhe, also ist der Druck der flüssigen Materie gegen die Grundfläche eines ungleichweiten Gefäses gleich der Schwere eines Volumens eben dieser Materie, welches mit dem Gefäse gleiche Grundfläche und Höhe hat. Fig. 123. u. 124.

Und wie dieses von diesen zweien Gefäsen erwiesen wird, kan es mit allen geschehen, sie mögen was immer für eine Gestalt haben.

Zusatz.

§. 339. Wenn demnach z. B. der Boden eines Fig. 125. Fasses durch eine Wassersaule, welche den Durchmesser des Bodens CD zum Durchmesser, und CF zur Höhe hat, eingedruckt werden kan, so mus derselbe auch durch eine Wassersaule AB, so dünne sie auch sein mag, wenn sie nur mit der andern gleiche Höhe hat, eingedruckt werden.

Wenn demnach in was immer für einem Wassergebäude z. B. unter der Bettung einer Schleusse schon einmal Wasser stehet, es seie dessen Volumen auch so dünne als es wolle, wenn es nur einen beträchtlichen Teil der Fläche einnimt, und es dringet von einer Höhe ein noch so feiner Wasserfaden dazu, so druckt er so stark gegen die Bettung aufwärts als eine Wassersaule, welche die Fläche des unter der Bettung stehenden Wassers zur Grundfläche, und die Höhe des Wasserfadens zur Höhe hat, daher es kein Wunder ist, wenn manchesmal von einem so kleinen und sehr leicht sich ereignen könnenden Zufal die Bettungen der Schleüssen in die Höhe gehoben, oder Wassergebäude zerstöret werden.

Lehrsatz.

§. 340. Wenn ein geradstehendes prismatisches Gefäß mit einer flüssigen Materie angefüllet ist, so ist der Druck den eine von dessen Seitenflächen von der flüssigen Materie auszustehen hat, gleich dem Gewichte dieser Materie, welche in einem Parallelopipedum enthalten ist, welches diese Seitenfläche zur Grundfläche die halbe Höhe der in dem Gefäß stehenden flüssigen Materie aber zur Höhe hat.

Be-

Beweis: Wenn ihr euch einbildet, daß die Höhe AB der Seitenfläche ABCD des prismatischen Gefäses DE in unendlich kleine Teile AI, IL, LT u. s. w. und AF = AB in eben soviele Teile AG, GQ, QS geteilet, und die Linien IH, LZ u. s. w. parallel zu AD; KI, ML u. s. w. parallel zu AF; und OG, PQ u. s. w. parallel zu AB gezogen wären, so ist gewis, daß die Schwere des Inhalts AG × AD × AB der flüssigen Materie soviel auf die Grundfläche AG × AD als die Schwere des Inhalts AI × AD × AF, gegen den Teil AI × AD der Seitenfläche; die Schwere des Inhalts QG × AD × QP soviel auf die Grundfläche QG × AD als die Schwere des Inhalts IL × IH × LM auf den Teil der Seitenfläche IL × HI, u. s. w. und das endlich die Schwere des Inhalts FR × AD × FK soviel auf die Grundfläche FR × AD als die Schwere des Inhalts VB × VX × VO gegen dem Teil der Seitenfläche VB × VX drucke. Alle diese gegen die Seitenfläche ABCD druckende Parallelopipedums aber machen zusammen den ganzen Druck gegen dieselbe aus, und stellen einen Körper oder ein dreieckigtes Prisma FABCD vor, davon AF = AB die Länge und Breite der Grundfläche, AD die Höhe, und folglich $\frac{AB}{2} \times AB \times AD$ der körperliche Inhalt ist. Eben diese Faktoren stellen aber auch den körperlichen Inhalt eines Parallelopipedums YSABCD vor, welches die Seitenfläche ABCD zur Grundfläche, und die halbe Höhe AB zu seiner Höhe hat, also ist der Druck der flüssigen Materie gegen eine Seitenfläche eines prismatischen Gefäses dem Gewicht eben dieser Materie gleich, welche in einen Parallelopipedum enthalten ist, welches die Seitenfläche zur Grundfläche,

Fig. 126.

und die halbe Höhe der flüssigen Materie in dem Gefäse zur Höhe hat.

Zusatz.

§. 341. Um also die Last zu berechnen, mit welcher ein Schutzbret einer Schleusse von den dahinten stehenden Wasser gedruckt wird, so hat man nach §. 340. nur den Flächeninhalt des Schutzbretes mit der halben Höhe des dahinter stehenden Wassers, und das dadurch erhaltene Produkt wiederum durch die eigenthümliche Schwere des Wassers zu multipliciren z. B. die Breite 6 Sch., die Höhe des dahinten stehenden Wassers 8 Schuh und der Kubikschuhwasser 57 ℔ schwer, so ist $6 \times 8 \times \frac{8}{2} \times 57 = 10944$ ℔ die gesuchte Last, und folglich wird man mit einer etwas grössern Kraft im Stande sein, daß Schutzbret aufzuziehen.

Zusatz.

Fig. 126. §. 342. Ferner folget, daß, wenn auch das Gefäß viel länger als hoch wäre, wie z. B. ED, und folglich viel mehrer flüssige Materie als das druckende Prisma FBACD oder Parallelopipedum YSABCD enthielte, so trüge doch das übrige nichts zu einen grössern Drucke gegen die Seitenfläche ABCD bei. Hingegen aber, wenn das Gefäß viel kürzer als hoch, und z. B. nur von der Länge EU wäre, folglich viel weniger als das druckende Prisma oder Parallelopipedum von der flüssigen Materie enthielte, so würde doch der Druck gegen die Seitenfläche so gros sein, als wenn das Gefäß so lang als hoch wäre. Daraus ist also überhaupt zu schliessen, daß der Druck gegen die perpendikular stehenden Seitenflächen eines Gefäses vol mit flüssiger Materie blos von ihrem Flächeninhalt,

halt, und der Höhe der dahinter stehenden flüssigen Materie abhange. Man wird also in dem Gefäse ED die Seitenfläche ABCD nicht dicker als in den Gefäse, welches nur die Länge EU hat, machen dörfen, damit sie dem Druck widerstehe.

Lehrsatz.

§. 343. Der Druck einer flüssigen Materie gegen eine Rechtwinkelichte aber schiefstehende Seitenfläche eines Gefäses ist gleich dem Gewicht dieser Materie, welche in einem Parallelopipedum enthalten ist, so die Seitenfläche zur Grundfläche, und die halbe Höhe der im Gefäß stehenden flüssigen Materie zur Höhe hat.

Beweis: Bildet euch ein, daß die schiefstehende Seitenfläche ACFE ebenfals wie §. 340. in lauter unendlich schmale horizontale Parallelogrammen eingeteilet seie, und daß iedes derselben so wie es tiefer unter der Oberfläche der flüssigen Materie lieget, auch mehrer von derselben gedruckt werde; folglich daß das unterste AE den grösten Druck von dem Parallelopipedum ABNE der flüssigen Materie, welches die ganze Höhe AB derselben zur Höhe hat, bekomme, und daß der Druck des obersten CF = o, oder unendlich klein seie. Sezet man nun AD = AB perpendikular auf AC, ziehet C und D zusammen, machet das dreieckigte Prisma ACDGFE vollends aus, und bildet sich ein, daß dieses aus so vielen Parallelopipeden oder Elementen, davon ADGE = ABNE das gröste, und CF = o das kleinste ist, zusammengesezt seie, als die Seitenfläche ACFE selbst parallelogrammen enthält, so stellet iedes dieser Parallelopipeden den Druck vor, welchen ein iedes Parallelogramm der Seitenfläche insbesondere auszustehen hat; daß ganze Prisma ACDGFE aber oder das Gewicht der dar- Fig. 127.

 innen

innen enthaltenen flüssigen Materie stellet den Druck vor, welcher gegen die ganze Seitenfläche ausgeübet wird. Da nun aber dieses Prisma einem Parallelopipedum ACMHILFE, welches die Seitenfläche ACFE zur Grundfläche, und die halbe Höhe AH $= \frac{AB}{2}$ zur Höhe hat, gleich ist, so ist auch erwiesen, daß der Druck einer flüssigen Materie gegen eine rechtwinkelichte schiefstehende Seitenfläche eines Gefäses dem Gewicht der flüssigen Materie gleich seie, welche in einem Parallelopipedum enthalten ist, das die Seitenfläche zur Grundfläche, und die halbe Höhe der flüssigen Materie zur Höhe hat.

Zusaz.

§. 344. Wäre die Seitenfläche SOPQ auf eine gegen der vorigen verkehrte Art schief gestellet, so läst sich der besondere Druck, welchen die Parallelogrammen dieser Seitenfläche von der in dem Gefäse enthaltenen flüssigen Materie auszustehen haben, ebenfals wieder durch die Parallelopipeden, welche das Prisma SOTVPQ zusammen ausmachen, vorstellen, wenn nehmlich ST = OR perpendikular auf SO gemacht wird; und eben daher läst sich auch auf die vorige Art erweisen, daß auch in gegenwärtigen Falle der Druck der flüssigen Materie gegen eine so gestelte Seitenfläche eines Gefäses dem obgesagten Prisma, oder einem Parallelopipedum OSUYXPQ gleich seie, welches die Seitenfläche des Gefäses zur Grundfläche, und die halbe Höhe der flüssigen Materie zur Höhe hat.

Zweites Hauptstück.

Von eingetauchten festen Körpern in flüssige Materien.

Erfahrung.

§. 345. Wenn ein fester Körper in eine flüssige Materie gelegt wird, so druckt er soviel von derselben aus ihrem Platz, als das unter die Oberfläche der flüssigen Materie eingetauchte Volumen betragt.

Erklärung.

§. 346. Wenn zween Körper von verschiedener Art oder Materie unter gleichen Volumen verschiedenes Gewicht haben, so pflegt man zu sagen, daß der eine ein grössere eigenthumliche Schwere (Gravitas specifica) als der andere habe. D. i. da ein Kubikzoll Gold ein grösseres Gewicht als ein Kubikzoll Eisen, und dieser ein grösseres als ein Kubikzoll Holz oder Wasser hat, so hat auch das erstere eine grössere eigenthumliche Schwere als das andere, und dieses wieder eine grössere als das dritte und vierte.

Lehrsatz.

§. 347. Wenn ein fester Körper in eine flüssige Materie gelegt wird, so mus derselbe 1. wenn er mit der flüssigen Materie gleiche eigenthümliche Schwere hat, unter ihrer Oberfläche in allen Stellen in Ruhe bleiben: 2. wenn er schwerer als die flüssige Materie ist, bis auf dem Boden des Gefäses untersinken; 3. wenn er leichter als die flüssige Materie ist, oben dar-

auf schwimmen, und nur ein Teil davon sich einsenken.

Beweis des ersten Teils: Wenn ein fester Körper in eine flüssige Materie von gleicher eigenthümlicher Schwere gelegt wird, so hat er soviel Vermögen sich nach dem Mittelpunkt der Erde zu bewegen, als ein ihm gleiches Volumen der flüssigen Materie selbst; da aber die Teile der flüssigen Materie sich untereinander das Gleichgewicht halten, und in Ruhe bleiben, so wird es auch dieser Körper thun, und so wie die flüssige Materie selbst in allen Stellen in Ruhe bleiben.

Beweis des zweiten Teils: Wenn ein fester Körper eine grössere eigenthümliche Schwere als eine flüssige Materie von gleichen Volumen hat, so trachtet er auch mit einer grössern Kraft nach dem Mittelpunkt der Erde als ein ihm gleiches Volumen der flüssigen Materie, derowegen überwindet er das Gleichgewicht der flüssigen Materie die ihn umgiebt, und sinket unter so weit er kan, nehmlich bis auf dem Boden des Gefäses.

Beweis des dritten Teils: Ist aber der Körper von geringerer eigenthümlicher Schwere als die flüssige Materie, so ist ein kleineres Volumen von derselben schon im Stande der Schwere des ganzen Körpers das Gleichgewicht zu halten, daher wird er auch nicht ganz, sondern nur zum Teil einsinken.

Lehrsatz.

§. 348. Wenn ein fester Körper in eine flüssige Materie gelegt wird, so mus er 1. wenn er mit derselben gleiche eigenthümliche Schwere hat, seine ganze Schwere in derselben verlieren; 2. wenn er schwerer als dieselbe, soviel von seiner Schwere verlieren, als

ein

ein Volumen, das dem des Körpers gleich ist, von der flüssigen Materie an Gewicht betragt; 3. wenn der Körper leichter als ein gleiches Volumen der flüssigen Materie ist, soviel von seiner Schwere verlieren, als das Volumen der flüssigen Materie an Gewicht betragt, welches er durch sein Einsenken hinweg drucket.

Beweis des ersten Teils: Da die flüssige Materie einem Körper von gleicher eigenthümlicher Schwere gänzlich das Gleichgewicht hält, §. 347., so wird er von derselben gleichsam getragen, und verlieret also seine ganze Schwere in ihr.

Beweis des zweiten Teils: Ist aber der Körper schwerer als die flüssige Materie, so betrachtet, daß das Volumen der flüssigen Materie, welches von ihm hinweg gedruckt wird, und dem ganzen Volumen desselben gleich ist, zuvor mit den übrigen Teilen der flüssigen Materie im Gleichgewicht stundte; da aber nun der Körper in seine Stelle komt, so mus die flüssige Materie eben wieder soviel gegen denselben würken, als die Schwere des hinweg gedruckten Volumens betragt, folglich mus der Körper soviel von seiner Schwere verlieren, als die Schwere des Volumens der flüssigen Materie betragt, welches dem Volumen des Körpers gleich ist.

Beweis des dritten Teils: Wenn endlich der Körper leichter als die flüssige Materie ist, so betrachtet, daß, wenn er mit derselben von gleicher Schwere wäre, auch ein gleiches Voluimen derselben mit ihrer Schwere in ihn würken, und er seine ganze Schwere verlieren würde; da er aber leichter als die flüssige Materie ist, so kan ihm auch ein kleineres Volumen derselben schon das Gleichgewicht halten, und er wird

daher nur soviel von seiner Schwere verlieren, als das Volumen der flüssigen Materie an Gewicht betragt, welches er durch sein hineinsinken hinweg drucket.

Zusatz.

§. 349. Wenn demnach eine Kraft einem in eine flüssige Materie getauchten Körper das Gleichgewicht halten sol, so mus dieselbe, 1. wenn der Körper mit der flüssigen Materie gleiche Schwere hat, unendlich klein oder = 0 sein; 2. wenn der Körper schwerer als die flüssige Materie, nur demjenigen Teil seines Gewichts gleich sein, um welchen er schwerer als ein ihm gleiches Volumen der flüssigen Materie ist, 3. wenn endlich der eingetauchte Körper leichter als die flüssige Materie ist, die Kraft nur dem Teile des Gewichts gleich sein, um dem er leichter als die flüssige Materie ist.

In allen drei Fällen aber verbleibt die Kraft nur so lang erleichtert, als der Körper noch so tief in der flüssigen Materie ist, als er selbst einsinket, so bald man denselben über die Oberfläche der flüssigen Materie herauszuziehen anfangt, so nimt auch seine Schwere wieder zu, und erhält solche wieder ganz, wenn er die flüssige Materie nicht mehr berühret. Daher komt es, daß man die Schwere eines Brunnen Eimmers so lang er noch untern Wasser fast gar nicht verspüret, hingegen da er aus demselben gezogen wird, sein ganzes Gewicht fühlet.

Zusatz.

§. 350. Da überhaupt ein fester Körper von grösserer eigenthümlicher Schwere in einer flüssigen Materie soviel von seinem Gewicht verlieret, als das Volumen

der

der flüssigen Materie wieget, so er hinweg drucket, §. 348., und zween Körper von gleichen Volumen, aber von verschiedener eigenthümlicher Schwere, z. B. ein Kubikschuh Blei und ein Kubikschuh Eisen gleiche Volumens der flüssigen Materie nehmlich einen Kubikschuh hinweg drucken, so müssen auch beide in einerlei flüssiger Materie gleich viel von ihrer Schwere verlieren; da aber ein Kubikschuh Blei schwerer als ein Kubikschuh Eisen ist, so ist klar, daß das Blei oder überhaupt ein ieder Körper von grösserer eigenthumlicher Schwere in einer flüssigen Materie in Ansehung seines ganzen Gewichts weniger als der Kubikschuh Eisen, oder überhaupt als ein ieder Körper von geringerer eigenthümlicher Schwere verliere. Z. B. wenn der Kubikschuh Blei = 644 ℔, der Kubikschuh Eisen = 435 ℔, und der Kubikschuh Wasser = 57 ℔ ist, so verlieret sowohl der erste als andere 57 ℔ im Wasser, dieser Verlust aber machet bei dem ersten etwas mehr als den 11ten, und bei dem andern etwas mehr als den 7ten Teil ihres ganzen Gewichts aus.

Zusatz.

§. 351. Da ein fester Körper von grösserer eigenthümlicher Schwere als eine flüssige Materie in derselben soviel von seinen Gewicht verlieret, als die flüssige Materie in einen gleichen Volumen selbst wieget, §. 348., so läst sich die Schwere derselben finden, wenn das Volumen des festen Körpers bekant ist, und man weis, wie viel er in freier Luft wieget, und wie viel er in der flüssigen Materie an seinen Gewicht verlieret; indeme man setzet: wie das Gewicht des festen Körpers in der Luft zu dem Verlust desselben in der flüssigen Materie, eben so verhält sich die eigenthümliche Schwere, oder z. B. das Gewicht eines Kubikschuhes

des Körpers zur eigenthümlichen Schwere z. B. eines Kubikschuhes der flüssigen Materie.

Wäre aber die eigenthümliche Schwere der flüssigen Materie bekant, und die des festen Körpers zu suchen, so hätte man zu setzen: wie der Verlust der Schwere des festen Körpers in der flüssigen Materie zu seinem ganzen Gewicht, so verhält sich die eigenthümliche Schwere der flüssigen Materie zu der eigenthümlichen Schwere des festen Körpers. Z. B. man wüste, daß die eigenthümliche Schwere oder ein Kubikschuh Wasser = 57 ℔, und man fände daß die Schwere eines festen Körpers von was immer für einem Volumen in der Luft 360 ℔, im Wasser aber 313 ℔ wäge, und folglich 47 ℔ verliere, so ist: 47 : 360 = 57 : x = 436 ℔ der eigenthümlichen Schwere, oder der Schwere eines Kubikschuhes des festen Körpers.

Zusatz.

§. 352. Da erforderlich ist, daß zween Körper von verschiedener eigenthümlicher Schwere gleiche Volumens haben müssen, wenn sie in einer flüssigen Materie gleich viel am Gewicht verlieren sollen, §. 350; so werden zween Körper von verschiedener eigenthümlicher Schwere auch von verschiedenen Volumens sein müssen, wenn sie einander die Wage in freier Luft halten sollen; aber eben daher werden sie einander in einer flüssigen Materie nicht mehr die Wage halten können, sondern, weil der von der grössern eigenthümlichen Schwere ein kleineres Volumen hat, so wird er auch weniger von seinem Gewichte verlieren §. 350., und also nothwendig einen Ausschlag an der Wage auf seiner Seite verursachen, und zwar werden ihre Volumens mit ihren eigenthümlichen Schweren, oder mit

ihren

ihren Verlusten am Gewicht in der flüssigen Materie in verkehrter Verhältnis stehen.

Zusatz.

§. 353. Weil ferner ein dopeltes, dreifaches u. s. w. Volumen eines festen und eigenthümlich schwerern Körpers als eine flüssige Materie auch einen dopelten dreifachen u. s. w. Teil in Ansehung eines einfachen Volumens an seinen Gewichte verlieret, so verhalten sich die Volumens zweener Körper von einerlei Art, wie die Teile der Schwere, so sie in der flüssigen Materie verlieren. Dieses giebt also Gelegenheit das Volumen, oder den kubischen Inhalt eines Körpers X, der etwann so unregelmässig ist, daß er durch die Regeln der Geometrie nicht genau ausgemessen werden kan, auf folgende Art zu finden: nehmlich nehmet einen beliebigen Körper A von eben der Materie wie der unregelmässige ist, dessen Inhalt euch aber schon bekant ist, oder doch leicht gemessen werden kan; wäget sowohl A als X in freier Luft und im Wasser oder in einer andern flüssigen Materie von leichterer Art; sehet zu, was ieder in demselben am Gewichte verlieret, und sezet: wie der Verlust des Körpers A zum Verlust des Körpers X, eben so verhält sich der Kubikinhalt des Körpers A zum gesuchten Kubikinhalt des Körpers X.

Zusatz.

§. 354. Da ein Körper von schwererer Art in einer flüssigen Materie soviel von seinem Gewicht verlieret, als das Gewicht eben dieser flüssigen Materie unter einem gleichen Volumen betragt §. 348.; ein Volumen einer gewissen flüssigen Materie aber schwerer als ein nehmliches Volumen einer andern flüssigen Materie,

von

von leichterer Art, ist, so mus ein Körper in zwoerlei flüssigen Materien gewogen, in der von schwererer Art mehr von seinen Gewicht verlieren, als in der leichtern. Derowegen wird ein Kubikschuh Blei im Wasser einen grössern Teil seines Gewichts als im Brandwein verlieren; und zwar werden die Verluste der Schwere mit den eigenthümlichen Schweren in gerader Verhältnis stehen. Wenn man demnach die eigenthümliche Schwere einer flüssigen Materie kennet, und sie von mehrern zu wissen verlangt, so hat man nur einen nehmlichen festen Körper von schwererer Art in denselben abzuwiegen, die verschiedenen Verluste, die er in denselben an seinen Gewichte leidet, aufzumerken, und alsdenn zusetzen: wie der Verlust des Gewichts des Körpers in der bekanten flüssigen Materie zu dem Verlust in einer ieden andern unbekanten, eben so verhält sich die bekante oder gegebene eigenthümliche Schwere der ersten flüssigen Materie zu ieder zu suchenden.

Zusatz.

§. 355. Aus eben der Ursach können zween gleich grosse und schwere Körper einander das Gleichgewicht nicht mehr halten, wenn sie auf eine Wage gelegt, und einer in eine flüssige Materie von schwererer Art, und der andere in eine von leichterer gesenkt werden, so wird ein Kubikschuh Eisen einem andern Kubikschuh Eisen, ieder von 435 ℔ das Gleichgewicht nicht mehr halten, wenn einer in Brandwein und der andere in Wasser gesenkt wird.

Aus eben diesem Grund kan man zwo Münzen untersuchen, ob nicht eine verfälscht seie, wenn man sie nehmlich auf eine Wage leget, und sowohl in freier Luft, als in Wasser abwieget. Haben

ben sie beidemale gleiches Gewicht so sind sie auch von gleicher Güte; wird aber eine im Wasser leichter als die andere, so ist es ein Zeichen, das die leichtere verfälscht ist.

Zusatz.

§. 356. Wenn ein fester Körper eine mindere eigenthümliche Schwere als eine flüssige Materie hat; so mus er, wenn er in dieselbe gelegt wird, um so tiefer einsinken, als sich seine eigenthümliche Schwere mehr der eigenthümlichen Schwere der flüssigen Materie nähert §. 348., und weil er soviel von der flüssigen Materie hinweg drucket, als er selbst schwer ist, so muß sich die eigenthümliche Schwere der flüssigen Materie zur Schwere des festen Körpers wie das Volumen z. B. eines Kubikschuhes der flüssigen Materie zu dem Volumen des Körpers, welches untersinket, verhalten. Wenn demnach das ganze innere Volumen eines Schiffes als ein Körper von minderer eigenthümlicher Schwere als das Wasser angesehen wird, und sowohl die eigenthümliche Schwere des Wassers = 57 ℔, und die Schwere 236550 ℔, und das Volumen des beladenen Schiffs bekant ist, so kan man den Teil des Volumens des Schiffes finden, welcher mit dieser Ladung unter Wasser dauhen wird, wenn man setzet: 57 ℔ : 236550 = 1 : x = 4150 ℔ Kubikschuh dem unterdauhenden Volumen.

Verlangte man aber zu wissen, mit welcher Last man ein Schiff, dessen Volumen, so weit man es nehmlich unter Wasser gehen lassen will, durch geometrische Regeln ausgemessen und bekant worden, beschweren darf, ohne das es Gefahr leidet unterzugehen, so kan man, wenn man die Schweren und Volumens z. B. wieder wie zuvor annimt, setzen:

1 Sch.

1 Sch. : 4150 Sch. = 57 ℔ : x = 236550 ℔ der Last, mit welcher das Schiff beschweret werden darf.

Obwohl die Metale von einer grössern eigenthümlichen Schwere als das Wasser sind, so kan man sie doch darauf schwimmen machen, wenn man sie nehmlich dünne und hohl ausschlägt, so daß das Volumenwasser, welches sie hinweg drücken müssen, bevor sie untersinken können, schwerer als ihr eigenes Volumen ist. Daher komt es, daß man sich kupferner oder blecherner Pontonsschiffen bedienen könne, und daß überhaupt Schiffe eine grössere Last tragen, als sie vermög ihren wahren Volumen solten.

Zusatz.

§. 357. Ferner folget noch, daß wenn man einen nehmlichen Körper von geringerer eigenthümlicher Schwere in zwo flüssige Materien von verschiedener eigenthümlicher Schwere z. B. einmal in Wasser, und einmal in Brandwein leget, derselbe in Brandwein als in der leichtern Materie tiefer als in Wasser oder in der schwerern einsinken werde, weil das Volumen von Brandwein grösser, als das Volumen von Wasser sein wird, welches dem Körper an Gewicht gleich ist, und von ihm ausgedruckt wird. Überhaupt aber werden die Einsenkungen eines festen aber von minderer eigenthümlicher Schwere in verschiedene flüssige Materien sich in umgekehrter Verhältnis der eigenthümlichen Schweren der flüssigen Materien befinden.

Eben daher ist die Ursach, warum ein beladenes Schiff im süssen Wasser tiefer als im Meer ge-

gehet, und in dem erstern manchesmale gar untersinket, ob es sich schon im andern ganz gut über Wasser erhalten hat.

Aufgabe.

§. 358. Wie das Verhältnis der eigenthümlichen Schwere von mehrern flüssigen Materien durch Eintauchung eines festen Körpers in dieselben zu finden.

Auflösung: 1. Nehmet ein metalenes oder gläsernes hohles Prisma, oder einen Cylinder der unten zugeschlossen ist, und teilet seine Länge in eine beliebige Anzahl gleiche Teile ein.

2. Stellet denselben in eine der vorhabenden flüssigen Materie, mit welcher ihr die übrigen vergleichen wollet, z. B. in Wasser; und werfet soviel bleierne Schrotte in denselben, bis er von selbsten im Wasser aufrecht stehet, und sich bis auf einen gewissen Teilungspunkt, welchen ihr anzunehmen gedenket, einsenket.

3. Stellet nun den Cylinder mit eben diesen bleiernen Schrotten beschwert auch in die übrigen noch vorhabenden flüssigen Materien, und bemerket ebenfals in ieder den Teilungspunkt, auf welchen sich der Cylinder einsenket.

4. Um also die Verhältnisse dieser flüssigen Materien zu finden setzet nach §. 357. wie die angemerkte Tiefe der Einsenkung in der ersten flüssigen Materie zur Tiefe in der andern, eben so verhält sich die eigenthümliche Schwere der andern flüssigen Materie zur eigenthümlichen Schwere der erstern. Wenn ihr nun mit allen übrigen eben so verfahret, und euch die eigenthümliche Schwere von einer dieser Materien bekant

ist,

ist, so werdet ihr sie auch von den übrigen erhalten.

Aufgabe.

§. 359. Wie die Verhältnis der eigenthümlichen Schwere von verschiedenen festen Körpern durch Abwägung in der freien Luft und in einer flüssigen Materie zu finden?

Auflösung: Erster Fal wenn die Körper eine grössere eigenthümliche Schwere als die flüssige Materie haben:

1. Hanget die vorhabenden Körper einen nach dem andern an eine Schnure oder Faden, dessen Schwere man als nichts ansehen kan, an einen Wagebalken, wieget sie in der Luft ab, und machet sie alle von einerlei Schwere.

2. Wieget sie auch in einer flüssigen Materie z. B. in Wasser, und sehet zu, was ieder an seinen Gewichte verlieret.

3. Sezet: wie der Verlust des ersten Körpers zu dem Verlust des andern, eben so verhält sich die eigenthümliche Schwere des andern, zur eigenthümlichen Schwere des ersten §. 352. wenn ihr nun mit allen übrigen Körpern so verfahret, und die eigenthümliche Schwere von einen derselben schon bekant ist, so findet ihr solche durch die angesezte Proportion von allen übrigen.

Zweiter Fal: Wenn die Körper eine mindere eigenthümliche Schwere als die flüssige Materie haben.

1. Nehmet einen beliebigen Körper P, der von einer grössern eigenthümlichen Schwere als die flüssige Materie ist, und der an den leichtern angehangen in dersel-

den

ben samt dem andern untersinket; wäget P in der freien Luft, und in der flüssigen Materie ab, und merket sowohl sein Gewicht, als auch den Verlust den er daran in der flüssigen Materie leidet.

2. Wäget auch einen der vorhabenden Körper A von minderer eigenthümlicher Schwere in freier Luft.

3. Hanget beide Körper A und P zusammen, wieget sie sowohl in freier Luft als in der flüssigen Materie, und merket was sie in dieser von ihrem Gewicht verlieren.

4. Ziehet diesen Verlust von der Summe ihres Gewichts, daß sie zusammen in freier Luft haben, ab, so wird der Unterschied das Gewicht anzeigen, welches die flüssige Materie unter einem Volumen hat, so dem von beiden Körpern gleich ist.

5. Ziehet endlich von diesem Unterschied den Verlust ab, welchen der Körper P in der flüssigen Materie allein erlitten hat, so wird der Uberrest das Gewicht eines Volumens der flüssigen Materie anzeigen, daß dem Volumen des leichtern Körpers A gleich ist; und wie sich das Gewicht dieses Volumens der flüssigen Materie zum Gewicht des Körpers A in freier Luft verhält, eben so verhält sich die eigenthümliche Schwere der flüssigen Materie, zur eigenthümlichen Schwere des leichtern Körpers A.

6. Verfahret nun mit den übrigen vorhanden habenden Körpern auf die nehmliche Art, nachdem ihr sie alle mit A von gleichen Gewicht gemacht habt, so werdet ihr auch die Verhältnisse finden, die ihre eigenthümliche Schweren untereinander haben.

Aufgabe.

§. 360. Wie an einem aus zwei verschiedenen Metalen zusammengemischten Körper die Menge eines ieden Metals insbesondere zu finden? vorausgesetzt, daß diese Metalle ihr Volumen nach geschehener Vermischung nicht ändern.

Auflösung: 1. Wäget den gegebenen gemischten Körper in freier Luft, und in einer flüssigen Materie z. B. im Wasser, und merket sein Gewicht P in der Luft, und den Abgang L desselben im Wasser.

2. Suchet das Gewicht eines gewissen Volumens z. B. eines Kubikschuhes sowohl von dem leichtern als schwerern Metalle, aus welchen der Körper zusammengemischt ist, und auch das Gewicht eines Kubikschuh Wassers nach einer der oben beschriebenen Arten.

3. Suchet, wie viel der Körper im Wasser verlieren würde, wenn er ganz vom leichtern Metal wäre; in dieser Absicht betrachtet, daß das Gewicht eines kubischen Schuhes desselben soviel im Wasser verliere, als das Gewicht eines Kubikschuh Wasser betragt, §. 348. folglich könt ihr setzen: wie das Gewicht eines Kubikschuhes des leichtern Metals, zum Gewicht eines Kubikschuh Wassers: eben so verhält sich das ganze Gewicht P des gegebenen Körpers zu dem Verlust C, den er im Wasser leiden würde, wenn er ganz von dem leichtern Metalle wäre.

4. Auf eben diese Art suchet auch den Verlust, so der Körper im Wasser leiden würde, wenn er ganz von dem schwerern Metal wäre, indem ihr setzet: wie das Gewicht eines Kubikschuhes des schwerern Metals zum Gewicht eines Kubikschuh Wassers, so verhält sich das Gewicht P des gegebenen Körpers zu dem Ver-

lust

lust K, den er im Wasser leiden würde, wenn er ganz von dem schwerern Metal wäre.

5. Ziehet den Verlust des schwerern Metals von dem Verlust des leichtern ab, und merket den Uberrest C — K auf.

6. Ziehet auch den Verlust des schwerern Metals von dem Verlust des gemischten Körpers ab, und bemerket ebenfals den Uberrest L — K.

7. Sezet: wie der erste Uberrest zum zweiten, eben so verhält sich das Gewicht des gemischten Körpers zum Gewicht X des darinn enthaltenen Teils des leichtern Metals

d. i. $C - K : L - K = P : X$

so ist: $P \times \frac{(L-K)}{C-K} = X$ dem Gewichte des leichtern Metals; und $P - X = Y$ dem Gewichte des schwerern Metals.

Beispiel.

Es seie ein Körper vom Kupfer und Zinn zusammengemischt gegeben, und man verlangt das Gewicht von iedem Metalle insbesondere zu wissen.

Ferner seie, daß der gegebene Körper in freier Luft 100 ℔ wäge, im Wasser aber 12 ℔ davon verliere. Dann nehmen wir als schon bekant an, daß der Kubikschuh Zinn 417 ℔, der von Kupfer 500 ℔ und der von Wasser 57 ℔ seie.

Derowegen können wir erstlich nach N. 3. sezen:

$$417 : 57 = 100 : C,$$

und $\frac{100 \times 57}{417} = C = 13\frac{279}{417}$ dem Verlust, welchen der Körper im Wasser an seinen

Gewicht leiden würde, wenn er ganz von Zinn wäre.

Und nach Nr. 4.

$500 : 57 = 100 : K.$

und $\frac{100 \times 57}{500} = K = 11\frac{2}{5}$ dem Verlust; welchen der Körper im Wasser an seinem Gewicht leiden würde, wenn er ganz von Kupfer wäre.

Dann ist nach Nr. 5.

$13\frac{465}{695} - 11\frac{2}{5} = 2\frac{187}{695} = C - K.$

Und nach Nr. 6.

$12 - 11\frac{2}{5} = \frac{3}{5} = L - K.$

Und nach der Nr. 7. gegebenen Formul

$$P \times \frac{(L - K)}{C - K} = X$$

ist $\frac{100 \times \frac{3}{5}}{2\frac{187}{695}} = \frac{60}{2\frac{187}{695}} = \frac{60}{\frac{1577}{695}} = \frac{60 \times 695}{1577}$ $= \frac{41700}{1577} = 26\frac{442}{1000}$ ℔ Zinn, so in dem gemischten Körper enthalten ist.

Und $100 - 26\frac{442}{1000} = 73\frac{558}{1000}$ ℔ Kupfer so den übrigen Teil des Körpers ausmachet.

Diese ist iene berühmte Aufgabe, welche der König Hiero von Syracus dem Archimedes gegeben hat, als er eine goldene Krone machen liese, und zu wissen verlangte, ob ihn der Goldarbeiter nicht betrogen habe. Man kan diese Aufgabe gleichsam als den Ursprung der Hydrostatik ansehen, weil sie, soviel bekant ist, am ersten Gelegenheit gegeben, über diese Materie nachzudenken. Wir können aber die Anfänger nicht unerinnert lassen, daß zur richtigen Auflösung dieser Aufgabe hauptsächlich folgende zwo Bedingungen nöthig sind. Erstlich müssen beide Metalle, woraus die

Ver-

Vermischung bestehet, rein, und mit keinen dritten vermischt sein. Zweiten müssen sie nach der Vermischung das nehmliche Volumen behalten, was sie zuvor hatten. Die Erfahrung aber lehret, daß viele Materien, wenn sie mit andern vermischet werden, ihr Volumen beträchtlich ändern; so machet 1 Kubikschuh Zinn und 1 Kubikschuh Kupfer nach ihrer Vermischung nicht 2 Kubikschuh sondern etwas weniger aus. Eben so ist es mit Zinn und Blei; das Gegenteil aber geschihet mit Zinn und Zink, und mit Blei und Wismuth. Ein mehreres kan man in den petersburger Akten nachlesen. Eben auf diese Art wird das Volumen von einigen flüssigen Materien z. B. von süssen und gesalzenen Wasser; von Vitriolöhl und Wasser; von Weingeist und Wasser nach ihrer Vermischung etwas kleiner.

Obwohl verschiedene Arten die eigenthümliche Schwere der Körper zu finden oben angegeben worden, so wollen wir doch der Bequemlichkeit willen die Verhältnisse derselben von verschiedenen Materien in einer Tafel hersetzen; zu gleich aber die Anfänger erinnern, daß, da die eigenthümliche Schwere von einer Materie von einerlei Art und unter gleichen Volumen öfters merklich verschieden angetroffen wird, es also sehr schwer ist, hierüber gänzlich richtige Bestimmungen zu machen. Sie haben sich daher nicht zu wundern, wenn sie oft in verschiedenen Autoren verschiedene Bestimmungen der Schwere der Materien antreffen. Nachstehende sind meistens aus Müschenbroeck genommen, weil sie fast durchaus für die bewehrtesten angenommen werden.

Tafel der Verhältnissen

der eigenthümlichen Schwere von verschiedenen Materien.

Flüssige Materien.

Regenwasser	1,000
Flußwasser	1,009
Distillirteswasser	0,993
Brunnwasser	0,999
Meerwasser	1,030
Scheidwasser	1,300
Luft	0,001½
Leinöhl	0,932
Baumöhl	0,913
Steinöhl	0,703
Terpentinöhl	0,792
Weinsteinöhl p. deliq	1,550
Vitriolöhl	1,700
Menschenblut	1,040
Gemein Salpetergeist	1,315
Terpentingeist	0,874
Abgezogener Weingeist	0,874
Weinessig	1,011
Burgunderwein	0,953
Moslerwein	0,916
Vitriolgeist	1,203
Distillirter Essig	1,030

Me-

Metalle und Mineralien.

Reinstes Gold	19,640
Dukatengold	18,261
Reines Silber	11,091
Teutsches Quecksilber	14,000
Japanisch Kupfer	9,000
Schwedisch Kupfer	8,784
Ungarisches Cimentkupfer	5,771
Gegossener Messing	8,000
Geschlagener Messing	8,349
Fein Zinn	7,320
Englisch Zinn	7,295
Zink	7,350
Sehr harter Stahl	7,704
Weicher Stahl	7,738
Feder Stahl	7,803
Feines Eisen	7,645
Gegossenes Eisen	7,114
Geschmidtes Eisen	8,286
Teutsches Blei	11,310
Englisch Blei	11,325
Bismuth	9,700
Teutsches Spiesglas	4,000
Ungarisches Spiesglas	4,700
Tyroler Zinober	7,300
Gemachter Zinober	8,200

Stein und Erdarten.

Demant	3,517
Alabaster	1,872
Weiße Kreide	2,252
Bergcristal	2,652
Böhmisch Granat	4,360
Jaspis	2,666

Weisser Marmor	2,707
Grünesglas	3,620
Bachsand	1,900
Gemeiner Sand	1,631
Magnet	4,585
Undurchsichtige Feuerstein	2,542
Durchsichtig detto	2,641
Weiß englisch Glas	3,150
Fruchtbare Erde	1,630
Gebrante Ziegel	2,006
Laimerde	1,929
Kieselstein	2,542
Gips	1,228

Salze und Leime.

Natürlich rother Schwefel	2,871
Lebendiger Schwefel	2,000
Ord. gegossener Schwefel	1,800
Alaun	1,714
Salpeter	1,900
Sal amoniac	1,453
Roher Weinstein	1,849
Präparirter Weinstein	1,900
Weisser Vitriol	1,900
Kampfer	0,996
Gelbes Wachs	0,955
Arabischer Gummi	1,375
Weihrauch	1,071
Meersalz	1,130
Pech	1,150
Schiespulver	0,914
Grünspan	1,714
Englisch Vitriol	1,880

Holz

Holzarten.

Schwarz Eben	1,177
Roth Brasil	1,031
Buxbaum	1,030
Rothsandel	1,128
Pantofelholz	0,240
Taxis	0,760
Eichen	0,929
Steineichen	1,143
Trocken Eichenholz	0,857
Zwetsgenbaum	0,663
Erlen	0,530
Ceder	0,613
Ahorn	0,755
Eschen	0,845
Buchen	0,855
Nusbaum	0,600
Rusten	0,600
Weiden	0,543
Fichten	0,550

Gleichwie die Ausdehnungen der Körper wieder mit solchen, d. i. Linien mit Linien, Flächen durch Flächen, und Körper durch Körper ausgemessen werden, eben so wird die Schwere der Materien durch die Schwere anderer Körper, welche bekanter Maassen Gewichter genent werden, d. i. durch Pfunde, Lothe u. s. w. abgewogen. So wie aber die Maasstäbe in verschiedenen Ländern und Orten verschieden sind, eben so geschihet es mit den hie und da üblichen Gewichten. Da aber sehr oft daran gelegen ist den Betrag eines gewissen Gewichts in einen andern zu wissen, so

fügen wir die Verhältnisse der in einigen Orten üblichen Pfundgewichter in nachstehender Tafel bei, woraus der Betrag eines ieden gegebenen Gewichts in einem andern verlangten durch die Regel de tri leicht zu finden ist. So wie aber die genaue Bestimmung der Maasverhältnisse ihre Schwierigkeiten hat, so hat es die richtige Bestimmung der Verhältnissen von den verschiedenen Gewichten noch weit mehr, daß es daher kein Wunder ist, wenn man sie oft sehr verschieden antrift.

Gegenwärtige Verhältnisse der Gewichter sind aus Klausbergs demonstrativen Rechenkunst genommen und ohne sonstiger Veränderung nur in diese etwas bequemere Form gebracht worden.

Verhältnisse verschiedener Pfundgewichter.

Amsterdamer	8125
Bologneser	5958
Berliner	7697
Breslauer	6667
Brüsler	7710
Cöln am Rhein	7680
Koppenhagner	7716
Florentiner	5581
Frankfurter am Main	7683
Genueser	5208
Genfer	9075
Hamburger	7980
Leipziger	7680
Livorner	5605
Londner	7434
Münchner	9225
Neapolitaner	6983

Nürn-

Nürnberger	8385
Pariser	8065
Petersburger	6723
Prager	8450
Römisches	5581
Straßburger	7755
Venetianer kl. gw.	4959
Wiener	9240

Vierter Abschnit.

Von den Eigenschaften und Kräften der Luft.

Erstes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der Luft überhaupt.

Erklärung.

§. 361.

Jene flüssige Materie, welche die ganze Erde umgiebt, und, wenn sie nicht durch andere Körper verhindert wird, allen leeren Raum erfüllet, wird die Luft genant. Die Ausdehnung aber, in welcher sie die Erde umgiebt, heist der Dunstkreis (Athmosphæra).

Obwohl die Luft unsichtbar ist, so kan man sich von ihren würklichen Dasein an allen Orten

auf

auf vielfältige, am leichtesten aber auf folgende Art überzeigen, wenn man nehmlich eine Fläche oder Körper etwas geschwinder beweget, und einen Wind fühlet, welcher nichts anders als die Luft ist, die durch die Bewegung des Körpers oder der Fläche aus ihrer Stelle gedruckt wird, ihre Gegenwart durch ein gewisses Geräusche oder Anstossen an einen andern Körper veräth, und solchergestalt einen Widerstand verursachet.

Damit man die Eigenschaften, der Luft genauer und bequemer zu untersuchen im Stande ist, hat man eine besondere Machine, die man die Luftpumpe nennet, erdacht. Ihre Einrichtung und Beschaffenheit ist verschieden, und bald mehr bald weniger zusammengesetzt. Ihr Hauptendzweck aber ist allemal, daß man mittelst derselben die in einem hollen Körper befindliche Luft herausziehen könne. Oefters wird sie auch so eingerichtet, daß man in einen hollen Körper noch mehrere Luft hineinpumpen kan. Um aber den Anfängern einen deutlichern Begrif von dieser Machine zu machen, so stellen wir eine der einfachesten und bequemsten Luftpumpen in der 16 Tafel, und zwar fig. 128. wie sie von vorne anzusehen, und fig. 129. im Durchschnit nach der Länge vor, und geben ihnen folgende Erklärung:

Fig. 128. u. 129. AB ist eine eiserne Hebelstange, an deren Achse ein Sternrad I befestiget ist, welches in die Zähne der beiden eisernen Kolbenstangen GH eingreifet, und dieselben durch die wechselweise Bewegung des Hebels mit ihren Kolben HH in den Stifeln CC auf und nieder treibet. Die Stifel

haben

haben beiläufig 2 Zoll im innern Durchmesser, und 9 Zolle zur Länge, müssen vollkommen gleichweit und glat ausgerieben sein, damit zwischen dem Leder des Kolbens und der innern Seiten des Stifels keine Luft durchdringen kan. Beide Stifel sind untenher durch ein eingeschraubtes Bodenstuck geschlossen; dieses aber hat in der Mitte ein kleines Löchlein D, welches bis in die unten befindliche Querröhren OO gehet, und beide Stifel vereiniget. Uber den obern etwas in den Stifel herfürragenden Teil dieses Bodenstückes wird ein kleiner Streif von einer Schweinsblase gebunden, damit er das in der Mitte befindliche Löchlein D bedecke, wie aus der 130. fig., welche diese Stücke etwas vergrössert im Grund und Durchschnit vorstellet, etwas deutlicher zu sehen ist. Fig. 130.

Durch die Mitte des Kolbens gehet eine Röhre welche bei E bis auf ein kleines Löchlein geschlossen ist, und das ebenfals obenher auf gleiche Art wie das am Bodenstück mit einem kleinen Streif einer Schweinsblase verbunden wird, wie ein dergleichen Kolben fig. 131. im Grundris und Durchschnit etwas vergrössert zu sehen ist. Fig. 131.

An die Mitte der Querröhre OO wird eine längere Röhre OP, fig. 129. angeschraubet; diese ist bei P aufwärts gebogen, und gehet durch den metallenen runden Teller RR, auf welchen die Gefäse wie S eines ist, gestellet werden, um die Luft daraus zu ziehen. Fig. 129.

Bei N ist eine Pippe angebracht, mittelst welcher man alle Gemeinschaft der Luft zwischen dem Gefäß S und den beiden Stifeln aufheben kan,

wenn die Luft einmal ausgezogen ist. Durch den Hahn dieser Pippe gehet noch ein Löchlein bis in die Röhre OP, welches ebenfals ihren wohl eingeriebenen Stöpsel L von Metal hat, solches dienet, die Luft wider in das Gefäß S zu lassen, ohne nöthig zu haben die Pippe selbst zu öfnen, oder die Gemeinschaft mit den Stifeln herzustellen.

An allen Orten wo Teile an dieser Machine zusammen geschraubet werden, die die Luft nicht durchlassen sollen, wird ein in Oehl getränktes Leder darzwischen gelegt; ebenfals wird der Teller RR mit einen solchen Leder bedeckt, welches nur in der Mitte, wo die Röhre OP in den Teller gehet, etwas ausgeschnitten wird; damit sich das Gefäß nach ausgezogener Luft fest gegen dem Teller andrucke, und keine Luft von aussen hinein dringen könne. Eben so werden auch die Streifen von der Schweinsblase, welche an das Bodenstück und an den Kolben gebunden, und die Stelle der Ventile vertretten, etwas mit Oehle feucht gemacht.

Wenn also nach dieser Einrichtung der Luftpumpe die Hebelstange AB wechselweise auf und nieder bewegt wird, so werden auch die Kolben in beiden Stifeln auf eben diese Art bewegt, und indem der erste hinauf gehet, so drückt die äussere Luft auf die an demselben befindliche Blase, verschliesset das Löchlein daselbst, und da zwischen dem Kolben und dem Bodenstück des Stifels ein leerer Raum entstehet, so suchet sich die in dem Gefäß S enthaltene Luft auszubehnen, sie druckt daher die über das Löchlein im Bodenstück gebundene Blase etwas in die Höhe, und dringet aus

dem

dem Gefäse S durch die offene Pippe N in den Stifel, sobald aber der Kolben wieder hinabgetrieben wird, so wird die nun in dem Stifel befindliche Luft zusammengedrückt, die Blase schliesset sich an das Bodenstück an, und lasset keine Luft in das Gefäß zurück; die Blase an dem Kolben hingegen wird von der in dem Stifel zusammengedrückten Luft etwas in die Höhe gehoben, und läßt der in dem Stifel befindlichen Luft freien Ausgang.

So wie alles dieses bei einen Stifel geschihet, eben so geschihet es wechselweise bei dem andern, dergestalt, daß so oft als der Kolbe in einem Stifel einmal auf und abgegangen, allemal soviel Luft aus dem Gefäse ausgezogen wird, als ein solcher Stifel fassen kan; wenn anders die Luftpumpe volkommen gut ist.

Ubrigens siehet man von selbsten, daß man sich auch mit einem Stifel allein behelfen könte, und daß zween das Ausziehen der Luft nichts als geschwinder machen.

Damit man auch wissen möge, um wie viel die Luft in einem auf dem Teller gestelten Gefäß nach einer gewissen Anzahlbewegungen des Kolbens in dem Stifel, oder nach einer Anzahl Züge verdünnet worden, vorausgesetzt, daß die Luftpumpe volkommen gut seie; so setze man, daß die Dichtigkeit oder Schwere der Luft in den Gefäse vor dem Aussaugen $= P$; die Luft, welche nach dem ersten Zug in dem Gefäse zurück bleibt $= 1R$, nach dem zweiten $= 2R$; nach dem dritten $= 3R$ u. s. w. seie; ferners seie der Inhalt des

Ge-

Gefäses = S, und der Inhalt eines Stifels = C; so ist der Uberrest der Luft in dem Gefäse nach dem 1ten Zug : $S + C : C = P : 1R$
2ten Zug : $S + C : C = 1R : 2R$
3ten Zug : $S + C : C = 2R : 3R$
und überhaupt, wenn man die Anzahl der geschehenen Zügen mit n benennet, so ist:

$$S + C : C = (n - 1) R : nR$$

und $(S + C)^n : C^n = P : nR.$

D. i. wie die Summe des Inhaltes des Gefäses und eines Stifels auf die so vielte Potenz erhoben, als Züge geschehen sind, zu dem Inhalt des Gefäses ~~Stifels~~ ebenfals auf die so vielte Potenz erhoben als Züge gemacht worden; eben so verhält sich die Dichtigkeit oder Schwere der zuerst in dem Gefäß gewesenen Luft zu derienigen, welche sich nach der Anzahl der gemachten Züge noch in demselben befindet.

Wenn man einen Barometer dergestalt bei der Luftpumpe anbringt, daß dessen unteres Gefäß unter das Gefäß, woraus die Luft gezogen wird, zu stehen komt, so kan man durch das Fallen des Quecksilbers in der Barometerröhre erkennen, ob die Luft bei ieden Versuch gleich viel ausgezogen wird, davon die Ursach weiter unten vorkommen wird. Wolte man die Luftpumpe so einrichten, daß die Luft in ein Gefäse gepumpet, und folglich verdicket werden könte, so hätte man nur den Kolben, und das Bodenstück des Stifels so anzuordnen, daß man die Blasen in beiden anstaat wie itzt obenher, alsdenn untenher aufbinden kan, damit die Oefnung derselben verkehrt geschehe.

Erfahrung.

§. 362. Wenn man ein gläsernes Rohr AB an einem Ende A mit dem Daumen zuhält, und das andere B in ein mit Wasser angefülltes Gefäß tauchet, so dringet unten etwas Wasser in das Rohr etwan bis in C, und zwar um so mehrer als das Rohr tiefer eingetaucht wird; und wenn man sie wieder herausziehet, so gehet auch das Wasser wieder aus demselben. Fig. 132.

Zusatz.

§. 363. Aus dieser Erfahrung ist also zu schliessen, daß, da die in dem Rohr befindliche Luft bei dem Eintauchen oben durch den Daumen, unten aber durch das Wasser herauszugehen gehindert wird, und dennoch Wasser in das Rohr dringet, die Luft nothwendig in ein kleineres Volumen zusammengedrückt werden müsse, und zwar um so mehr, als mehr Wasser von unten in das Rohr dringt, oder dasselbe tiefer eingetaucht wird.

Erfahrung.

§. 364. Wenn man eine hohle Kugel A, die mit einer Oefnung D, welche sich durch eine Pippe B sperren und öfnen läßt, auf die Luftpumpe schraubet, und nach geöfneter Pippe B noch mehr Luft in dieselbe pumpet, dann die Pippe sperret, die Kugel von der Machine abschraubet, und die Pippe wieder öfnet, so dringet die Luft mit einem Getöse aus der Oefnung. Fig. 133.

Zusatz.

§. 365. Es läßt sich daher in einen aehnlichen Raum mehrere Luft zusammenpressen, oder dichter machen, als sie sonst vermög ihren natürlichen Zustand wäre.

Erfahrung.

§. 366. Man binde die Oefnung einer unaufgeblasenen Schweinsblase, in deren Falten nur wenig Luft enthalten ist, fest zu, lege sie unter die Glocke der Luftpumpe, und ziehe die Luft aus derselben, so wird die Blase sich nach iedem geschehenen Zug immer mehr aufblasen, bis sie ganz vol ist. Läst man aber die Luft wieder unter die Glocke, so fält die Blase auch wieder zusammen.

Zusatz.

§. 367. Aus dieser Erfahrung siehet man, also, daß eine nehmliche Menge Luft bald einen grössern, bald einen kleinern Raum ausfüllen könne, und sich also ausdehnen oder verdünnen lasse; und diese Ausdehnung geschiht alsobald, als die Luft, so die Blase von aussen umgiebt selbst dünner gemacht wird, sobald also die Luft irgendwo dünner wird: so suchet sich die neben befindliche dahin auszudehnen, bis sie selbst so dünne als in den Nebenört geworden ist. Eben daher kan niemals ein Luftleerer Raum entstehen, es wäre denn, daß die Luft in denselben zu bringen durch einen andern dichten Körper gehindert würde.

Erfahrung.

§. 368. Bringt man eben eine solche Blase wie zuvor gemeldet worden, mit der Vorsicht an ein Feuer, daß sie sich nicht anbrenne, oder an einen warmen Ofen, so wird sie sich nach und nach selbst aufblasen; bringt man sie aber alsdenn in einen kalten Ort, so komt sie wieder in ihren vorigen Zustand, oder fallet zusammen.

Zu-

Zusatz.

§. 369. Daraus ist also abzunehmen, daß die Wärme die Luft in der Blase ausdehnen, und ihr einen grössern Raum einnehmen mache, und daß die Kälte das Gegenteil verursache. Folglich das überhaupt die Wärme und Kälte in der Dichtigkeit der Luft eine grosse Veränderung verursachen könne.

Erfahrung.

§. 370. Blaset man eine Blase auf, oder häufet die Luft in dieselbe, und sticht mit einer Nadel auf was immer für einer Seiten hinein, so dringt die Luft daselbst alsobald mit Gewalt heraus, bis sie mit der äussern wieder im Gleichgewicht ist.

Zusatz.

§. 371. Es ist daher klar, daß sich die Luft nach allen Seiten und zwar so lang auszudehnen suche, bis sie mit der benachbarten Luft wieder von gleicher Dichtigkeit ist.

Zusatz.

§. 372. Da man aus den angeführeten Erfahrungen siehet, daß die Luft, durch was immer für eine Kraft zusammengedrückt oder ausgedehnet, sich so gleich, als die Ursache ihrer Zusammendrückung oder Ausdehnung zu würken aufhöret, wieder in ihren vorigen Zustand zu setzen suchet, so ist zu schliessen, daß die Luft eine Federkraft habe, oder elastisch seie, und daß sie durch diese Kraft nach allen Seiten eben so stark zurück würke, als sie von einer andern Kraft zusammengedrückt, oder ausgedehnet wird.

Die vielfältige Erfahrung lehret, daß die Ausdehnung und Zusammendrückung der Luft, oder ihre Federkraft ungemein gros sein könne, und auch nach sehr langer Zeit an diesen Vermögen nicht den mindesten Abgang oder Verminderung leide. Man siehet an den sogenanten Windbüchsen mit welcher Gewalt, und auf welche Weite eine in dieselbe geladene Kugel durch die Ausdehnungskraft der in die Flasche zusammengepreßten und losgelassenen Luft getrieben wird, wenn sie auch noch so lang geladen ist. Es ist auch bekant, was für grosse Läste blos durch die Ausdehnung der Luft in gewissen eigens erfundenen Machinen, deren Beschreibung hier zu weitläufig wäre, aufgehoben, und bewegt werden können, davon die in den ungarischen Bergwerken befindliche sogenante Luftmachine, welche zum Wasserschöpfen angewendt ist, zu einen besondern Beispiel dienet. So gros aber auch die ausdehnende oder die elastische Kraft der Luft an sich ist, so hat sie doch auch ihre gewisse von der Natur festgesetzte Gränzen, die sie nicht überschreiten kan. Insgemein wird mit Hr. Boyle angenommen, daß die Luft sich in ein 4000mal grösseres Volumen ausdehnen könne, als ihr natürlicher Zustand ist; und Halles sagt, er habe die Luft in einen 1838mal kleinern Raum zusammengepresset, als sie zuvor einnahm, so daß sie alsdenn dopelt so dicht als Wasser war. Nebst diesem giebt der berühmte Hr. Euler vor, daß die Luft an der Oberfläche der Erde mit einer solchen Geschwindigkeit in einen luftleeren Raum einzudringen suche, als ein frei fallender Körper aus einer Höhe von 29100 rheinländischen Schuhen erlangen wür-

würde, welches in einer Sekunde 1348 Schuh machet.

Erfahrung.

§. 373. Wenn man aus einer hohlen Kugel A mittelst der Luftpumpe die Luft herausziehet, dann die Pippe B schliesset, und die Kugel genau wäget, darnach aber die Pippe B wieder öfnet, damit die Luft hinein kan, so wird die Wage gleich einen Ausschlag geben, und die Kugel schwerer als da sie Luftleer war, befunden werden. Merket man nun ihr Gewicht auf, bringet sie abermal auf die Luftpumpe, pumpet soviel Luft hinein, als sich thun läst, und wäget sie abermal, so wird man sie noch schwerer als das vorigemal finden. Oefnet man endlich die Pippe B nochmal, um die zusammengepreste Luft herauszulassen, so wird die Kugel wieder ihr voriges Gewicht erhalten. Fig. 133.

Zusaz.

§. 374. Daraus ist also klar zu erkennen, daß die Luft schwer seie, und zwar um so schwerer, als sie in einen gewissen Volumen dichter ist.

Zusaz.

§. 375. Da die Luft eine Schwere hat, so sucht sie sich dem Mittelpunt der Erde zu nähern, folglich drückt sie gegen alle unter ihr befindliche Körper, und also auch die höhere Luft auf die niedere. Je höher demnach eine Luftsaule ist, ie mehr wird die untere Luft von der obern gedrückt.

Zusaz.

§. 376. Weil also die Luft in unsern Dunstkreise unten oder nahe an der Oberfläche der Erde mehr von

der obern gedrückt wird, als in einer grössern Höhe über derselben, so mus sie daselbst auch dichter sein. Die Dichtigkeit des Dunstkreises kan also nicht in allen Orten gleich sein, sondern mus abnehmen wie seine Höhe zunimt; oder die Luft mus immer dünner werden, so wie sie von der Oberfläche der Erde weiter entfernt ist; und weil die Federkraft der Luft ihrer Zusammendrückung gleich ist, so mus auch die Luft unsers Dunstkreises mehr Federkraft haben, nachdem sie von der obern mehr gedrückt wird, oder der Erde näher ist; wenn dieselbe nicht durch Würkung fremden Ursachen verhindert wird.

Zusatz.

§. 377. Da ein in der Luft befindlicher Körper auf allen Seiten von ihr umgeben ist, so wird auch ein ieder Punkt seiner Oberfläche durch eine darauf ruhende Luftsaule gedrückt, die die Höhe des Dunstkreises zur Höhe hat; da aber die Höhen derselben auf allen Seiten gleich sind, so wird auch der Körper auf allen Seiten gleichstark gedrückt.

Zusatz.

§. 378. Der gesamte Druck also, welchen ein in der Luft befindlicher Körper von derselben zu leiden hat, ist gleich der Schwere einer Luftsaule, die die Oberfläche des Körpers zur Grundfläche, und die Höhe des Dunstkreises zur Höhe hat.

Wenn man deme zu folge die Oberfläche des ganzen menschlichen Körpers = 20 Quadratschuhe annimt, so hat derselbe durch den Druck des Dunstkreises beständig eine Last von 40000 ℔ auf sich. Es ist für sich klar, daß er diese Last unmöglich aushalten könte, wenn nicht der Druck

auf

auf allen Seiten gleich wäre, daher wir ihn auch eben so wenig, als den Druck des Wassers empfinden, wenn wir auch noch so tief in demselben versenkt sind.

Zusatz.

§. 379. Deme ungeachtet ist die Luft in einem Gefäse, oder in mehrern die mit einander Gemeinschaft haben, wenn sie nicht von ganz ungewöhnlicher Grösse sind, in allen Orten derselben von gleicher Dichtigkeit, weil der Unterschied der Höhen des Dunstkreises in denselben nicht beträchtlich genug ist, daß der verschiedene Druck der obern und untern Teilen schon merklich werden könte.

Erfahrung.

§. 380. Wenn man stark riechende Materien abrauchen läst, so verspüret man ihren Geruch in der Luft oft auf eine beträchtliche Weite. Eben so nimt man bei neblichten Wetter die Feuchtigkeit augenscheinlich wahr, u. m. d. gl.

Zusatz.

§. 381. Da also die in Dünste aufgelöste Materien in der Luft schwimmen, so müssen sie leichter als dieselbe sein; und da dergleichen Auflösungen und Ausdünstungen verschiedener Materien in der Natur stäts vorgehen, so kan auch die Luft wenigstens nahe an der Oberfläche der Erde nicht ohne fremde Körper, oder ganz rein sein, und diese fremde Körper werden in der Luft um so leichter schwimmen, als sie selbst leichter sind, oder die Luft schwerer ist. §. 347. Da ferner die Luft in grössern Höhen des Dunstkreises immer leichter wird, §. 376. so können auch die Dünste von

fremden Materien nur bis auf eine gewisse Höhe in demselben steigen, daher wird auch die Luft, ie höher sie über der Oberfläche der Erde ist, um so reiner sein.

Erfahrung.

Fig. 134. §. 382. Stellet einen messingenen Cylinder A der auf beiden Enden offen ist, auf den Teller der Luftpumpe, leget oben über die Oefnung ein nasses Leder, und eine Glasscheibe darauf, so werdet ihr solche ohne einigen Widerstand zu empfinden, wieder hinwegnehmen können; leget sie aber wieder darauf, und pumpet etwas Luft aus dem Cylinder, so werdet ihr schon einige Gewalt anwenden müssen, um sie hinweg zu nehmen; fahret ihr aber fort mit Auspumpen, so wird endlich die Glasscheibe mit Gewalt zerspringen.

Zusaz.

§. 383. Daraus läst sich also abnehmen, daß, so lang die Luft auf allen Seiten gleich gegen einen Körper drücket, man auch keinen Widerstand von derselben spüret, sobald aber die Luft auf einer Seite dünner gemacht wird, so drückt sie auf der andern mehr entgegen, und man hat alsdenn diesen Druck zu überwinden, wenn man den Körper bewegen wil, wird endlich die Luft auf einer Seite so dünne gemacht, daß der Druck auf der andern Seite so gros wird, daß der Körper ihn nicht mehr widerstehen kan, so zerbricht sie ihn.

Noch eine überzeigende Erfahrung von der Gewalt des Druckes der Luft, wenn er nur gegen eine Seite allein würket, an der andern aber zu würken gehindert wird, kan man an den sogenanten magdeburgischen Halbkugeln sehen, welche,

nach-

nachdem die Luft aus ihnen gezogen worden, so stark zusammenhangen, daß sie mit vieler Gewalt nicht auseinander gebracht werden können.

Erfahrung.

§. 384. Wenn man auf die obere Oefnung B eines hohlen Cylinders A, der unten mit einem starken Boden versehen ist, eine Glasscheibe fest anküttet, hierauf solchen unter die Glocke der Luftpumpe stellet, und die Luft aus derselben ziehet, so zerspringt die eingeküttete Glasscheibe in Stücken. Fig. 135.

Zusatz.

§. 385. Es läst sich also daraus schliessen, daß die in dem Cylinder enthaltene Luft, nachdem dieselbe aus der Glocke gepümpet worden, sich so gewaltig ausdehne, daß sie die Glasscheibe sowohl zersprengen könne, als wenn sie wie zuvor aus dem Cylinder gepumpet wäre, und die äussere Luft darauf drückte.

Daher geschihet es, daß eine wohl verstopfte gläserne Flasche auf einen warmen Ofen gestelt zerspringet.

Zweites Hauptstück.

Von dem Gleichgewicht der Luft mit andern flüssigen Materien.

Erfahrung.

§. 386. Wenn man eine über 32 Schuh lange Röhre AC, welche an ihren beiden Enden durch ange- Fig. 136.

brachte Pippen geschlossen und geöfnet werden kan, von oben mit Wasser anfüllet, nachdem man die untere Pippe zuvor geschlossen hat, hierauf in ein mit Wasser angefültes Gefäß D stellet, und die Pippe C öfnet, so fallet das Wasser in der Röhre soweit herab, daß es mit dem in dem Gefäße befindlichen gleiche Höhe bekomt.

Wird aber die Pippe bei A eher geschlossen, als die bei C eröfnet wird, so fält das Wasser in der Röhre nach Eröfnung der untern nur bis in B, und wird daselbst beiläufig um 32 Schuh höher als in dem Gefäse D stehen bleiben.

Wird aber die Röhre nur etwann bis in E mit Wasser gefüllet, so daß zwischen der Pippe A und dem Wasser noch ein mit Luft angefülter Raum bleibet, und die Pippe A wird hierauf geschlossen, und C eröfnet, so fält das Wasser unter 32 Schuh etwann bis in F herab, und zwar um so weiter, als mehr Luft in der Röhre war.

Zusaz.

§. 387. Da man überhaupt die Röhre und das Gefäß als gemeinschaftliche Röhren ansehen kan, und die Luft sowohl auf die Röhre als auf das Gefäß drücket, so mus auch das Wasser im ersten Falle aus der Röhre ganz herab fallen, bis es mit dem Wasser im Gefäse gleiche Höhe erhält, damit das Gleichgewicht erfolge. §. 331 u. 332.

Da aber im andern Falle die Luft nur auf die Wasserfläche des Gefäses nicht aber auf die Wasserfläche in der Röhre drucken kan, so widerstehet die Luftsaule des Dunstkreises mit ihrem Gewichte dem

Gewichte der Wassersaule in der Röhre, und hält ihr das Gleichgewicht.

Ist aber wie im dritten Falle ober dem Wasser der Röhre etwas Luft enthalten, so sucht sich derselbe bei dem Fallen des Wassers auszudehnen, und diese Ausdehnungskraft widerstehet dem Drucke der Luftsaule des Dunstkreises, daß dieselbe das Wasser in der Röhre nicht mehr auf der vorigen Höhe von 32 Schuhen, sondern nur in einer minderen F erhalten kan.

Zusaz.

§. 388. Daraus erhellet also, daß eine Wassersaule von beinahe 32 Schuhhöhe einer Luftsaule von gleicher Grundfläche, welche aber die Höhe des ganzen Dunstkreises zu ihrer Höhe hat, das Gleichgewicht zu halten vermag.

Daß die Höhe der Wassersaule, welche einer Luftsaule des Dunstkreises von gleicher Grundfläche das Gleichgewicht halten kan, nur bei nahe von 32 Schuhen angegeben werden kan, ist die Ursache, weil weder das Wasser noch die Luft allezeit eine gleiche Schwere haben.

Zusaz.

§. 389. So wie man eine Röhre, welche an einem Ende ganz geschlossen ist, wie im zweiten Falle, mit einer leichtern oder schwerern flüssigen Materie, füllet, so wird auch die Höhe, in welcher sie von der Luftsaule des Dunstkreises im Gleichgewicht erhalten wird, grösser oder kleiner sein, und zwar werden diese Höhen in umgekehrter Verhältnis der eigenthümlichen Schweren dieser flüssigen Materien stehen.

Auf-

Aufgabe.

§. 390. Wie die Schwere einer Luftsaule des Dunstkreises zu finden, wenn ihre Grundfläche gegeben ist?

Auflösung: 1. Multipliciret die gegebene Grundfläche der Luftsaule durch die Höhe einer Wassersaule, so ihr das Gleichgewicht hält, oder durch 32 Schuhe; so wird das Produkt der körperliche Inhalt einer Wassersaule sein, welche mit der Luftsaule gleiche Schwere hat.

2. Setzet: wie 1 Kubikschuh Wasser zum körperlichen Inhalt der gleich berechneten Saule von eben dieser Materie; so verhält sich die Schwere eines Kubikschuh Wassers zur Schwere der ganzen Wassersaule.

Da nun diese Wassersaule mit der Luftsaule gleiche Schwere hat, so wird dadurch auch die Schwere der Luftsaule des Dunstkreises bekant.

Zusatz.

§. 391. Wenn zwo Luftsaulen gleiche Höhen, aber verschiedene Grundflächen haben, so verhalten sich ihre körperliche Inhalte, und folglich auch ihre Schweren gegen einander wie ihre Grundflächen §. 283. Geom. und da ihr Druck ihrer Schwere gleich ist, so werden auch zwo Flächen, die den Grundflächen der Luftsaulen gleich sind, durch zwo gleichhohe Luftsaulen nach dem Verhältnis ihrer Grundflächen gedrückt.

Zusatz.

§. 392. Da die Luft mit ihrer Schwere wie alle übrige schwere Körper nach einer geraden, und auf dem Horizont senkrecht stehenden Linie drücket, so hat

man

man die Grundfläche einer Luftsaule allezeit als eine gerade horizontal liegende Fläche zu betrachten, die von eben solcher Grösse ist, daß sie von der Luftsaule volkommen gedeckt werde, was auch die Fläche, worauf der Druck würklich geschihet, immer für eine aus- oder eingebogene Gestalt haben mag. Wenn man demnach die Grundfläche einer Luftsaule, welche auf eine Kugel drücket, in Betrachtung ziehen wil, so hat man nicht die halbe Oberfläche der Kugel, sondern die Fläche ihres grösten Zirkels zu nehmen. Eben so würde man bei einem gerade stehenden Kegel, gegen dessen Spitze eine Luftsaule von gleichen Durchmesser der Grundfläche des Kegels in der Richtung seiner Achse drücket, die Grundfläche der Luftsaule nicht nach der Oberfläche sondern nach der Grundfläche des Kegels zu schätzen haben.

Aufgabe.

§. 393. Wie die eigenthumliche Schwere eines gewissen Volumens z. B. eines kubischen Schuh Luft zu finden?

Auflösung: 1. Nehmet eine grosse gläserne Kugel, welche eine Oefnung hat, die sich durch eine angebrachte Pippe sperren und öfnen läst; wäget sie auf einer sehr genauen Wage, indem sie mit Luft angefüllet ist, die der äussern an Dichtigkeit volkommen gleich ist, und merket das Gewicht davon.

2. Ziehet die Luft mit Hülfe einer guten Luftpumpe so rein aus, als immer möglich ist, damit ihr den geringen etwas noch zurückbleibenden Teil der Luft als nichts ansehen könnet.

3. Wä-

3. Wäget nun die luftleere Kugel abermal, und ziehet das gefundene Gewicht von dem vorigen ab, so wird der Unterschied die Schwere des in der Kugel enthälten gewesten Lufts sein.

4. Suchet den körperlichen Inhalt der Kugel entweder nach geometrischen Regeln, oder, wenn sie nicht ganz regelmässig wäre, wie meisten geschiht, füllet sie mit Wasser, und wäget sie abermal; ziehet das Gewicht der Kugel, welches oben gefunden worden, davon ab, so habt ihr das Gewicht des Wassers.

5. Da wir das Gewicht eines kubischen Schuh Wasser schon bekant zu sein annehmen, so setzet: wie die Schwere eines Kubikschuh Wassers zur Schwere des Wassers in der Kugel; eben so verhält sich 1 Kubikschuh zum körperlichen Inhalt der Kugel.

6. Setzet endlich: wie der körperliche Inhalt der Kugel zu einen Kubikschuh; eben so verhält sich die gefundene Schwere der in der Kugel enthalten gewesten Luft zu der Schwere eines Kubikschuh Luft.

Da man durch die vorhergehenden zwo Aufgaben sowohl die Schwere einer Luftsäule des Dunstkreises von einer gegebenen Grundfläche, als auch die Schwere eines gewissen Volumens z. B. eines kubischen Schuhes Luft findet, so scheinet es, daß man eben dadurch auch die Höhe des Dunstkreises bestimmen können solte. Allein da die Luft in verschiedenen Höhen nicht von gleicher Dichtigkeit ist, §. 376. und man bisher noch durch kein Mittel erfahren konte, in welchen Verhältnis dieselbe abnimt, so ist es auch nicht möglich, die eigentliche Höhe des Dunstkreises sicher zu bestimmen.

Er-

Erklärung.

§. 394. Wenn man eine über 28 Zoll lange gläserne Röhre AB an einem Ende A zuschmelzet, durch das andere offene B über sie ganz vol mit Quecksilber füllet, und dasselbe, ohne daß zuvor etwas heraus laufe, unter die Oberfläche des in einen Gefäß D bereit stehenden Quecksilbers stecket, und vertikal aufstellet, so wird diese Röhre nach ihrem Erfinder die toricellische Röhre, oder auch Barometer genent. Fig.137.

Zusaz.

§. 395. Weil das Wasser in einer oben volkommen geschlossenen Röhre von der Luftsaule des Dunstkreises beinahe auf einer Höhe von 32 Schuhen erhalten wird, §. 386. das Quecksilber aber 14mal schwerer als das Wasser ist, und die Höhen, auf welchen sich die flüssigen Materien von verschiedener Schwere das Gleichgewicht halten, in umgekehrter Verhältnis dieser Schweren stehen, §. 389. so mus die Höhe, in welcher die Quecksilbersaule von der Luftsaule in der toricellischen Röhre erhalten wird, auch 14mal kleiner als die der Wassersaule, und folglich nur bei 28 Zoll sein.

Zusaz.

§. 396. So wie das Wasser aus der Röhre herabfält, wenn sie oben nicht geschlossen ist, oder nicht in der Höhe von 32 Schuhen stehen bleibet, wenn der obere Raum in derselben nicht volkommen luftleer ist, §. 386. so geschihet es auch in der toricellischen Röhre aus der nehmlichen Ursach mit dem Quecksilber.

Er-

Erfahrung.

§. 397. Die Höhe der Quecksilbersaule in einer toricellischen Röhre ist in einem nehmlichen Orte sehr oft der Veränderung unterworfen.

Zusatz.

§. 398. Da die Quecksilbersaule in der toricellischen Röhre ihre Höhe ändert, so muß sich auch ihre Schwere ändern, und weil sie doch allezeit der Luftsaule des Dunstkreises das Gleichgewicht hält, so folget nothwendig, daß auch die Schwere oder der Druck des Dunstkreises sich so oft verändern müsse, als die Höhe des Quecksilbers sich in der toricellischen Röhre ändert. Daher kan diese Röhre oder das Barometer überhaupt gebraucht werden, die Veränderungen der Schwere des Dunstkreises oder seines Drucks wahrzunehmen.

Durch viele Erfahrungen weis man, daß die Veränderungen, welche an der Höhe des Barometers gewöhnlicher weise vorgehen, in den kalten Erdstrichen am grösten, in dem gemässigten fast niemals über zwei Zolle betragen, in den hitzigen Erdstrich aber, oder unter dem Aequator selbst am kleinsten sind.

Um einen Barometer nach der aller gemeinsten und einfachesten Art zu verfertigen hat man hauptsächlich folgendes in acht zu nehmen:

1. Erwählet man ein gerades gläsernes Rohr von beiläufig 34 bis 36 Zolle in der Länge, und höchstens von 2 oder 3 Linien im innern Durchmesser. Man hat bei dieser Auswahle insbesondere darauf zu sehen, daß das Glas rein, und

wenig-

wenigsten in der Gegend, wo das Quecksilber mit seiner Oberfläche die Veränderungen des Dunstkreises anzeigen wird, genau von gleicher Weite seie.

2. Nachdem die Röhre von aller Unreinigkeit und Feuchte innerlich gesäubert worden, wird das obere Ende derselben zugeschmolzen, und mittelst eines Trichters ganz vol mit wohl gereinigten und etwas warm gemachten Quecksilber angefüllet. Man hat dabei acht zu geben, daß, wenn Luftblasen sich zwischen dem Quecksilber in der Röhre verschlagen, solche entweder durch rüteln, oder durch anhalten einer brennenden Kohle nach und nach zusammengesammelt, und endlich oben durch die Oefnung ausgetrieben werden, bis das Quecksilber durchaus ganz dicht in der Röhre erscheinet.

3. Erwählet man ein beliebiges gläsernes oder porzellanenes Gefäß, dessen Durchmesser zum wenigsten 10 bis 14 male grösser als der innere Durchmesser der Röhre ist, und füllet es 8 bis 10 Linien hoch mit Quecksilber. Dieses Gefäß wird aber von darum soweit angenommen, damit die Veränderung der Quecksilberhöhe bei dem steigen und fallen des Quecksilbers in der Röhre in demselben noch nicht merklich wird.

4. Drückt man auf das offene Ende der gefülten Röhre einen Finger fest an, kehret das zugeschmolzene Ende in die Höhe, fahret mit dem andern samt dem Finger unter die Oberfläche des in dem Gefäß befindlichen Quecksilbers, und ziehet den Finger von der Oefnung hinweg, so fallet das Quecksilber in der Röhre alsbald soweit her-

ab, als es vermög dem damaligen Druck des Dunstkreises kan, und obenher entstehet ein luftleerer Raum.

5. Befestiget man die vertikal stehende Röhre an dem neben dem Gefäß aufwärts gehenden Bretlein oder hölzernen Stüze nach Belieben, und decket das Gefäß mit einem Deckel leicht zu, damit kein Staub oder Unreinigkeit hinein kan.

6. Zeichnet man eine Skale auf Papier etwann von 3 Zoll lang, teilet sie in Linien ein, und befestiget sie oben gegen dem Ende der Quecksilbersaule dergestalt an das Bretlein, daß der mittlere Teilungspunkt eben so hoch über die Fläche des in dem Gefäses befindlichen Quecksilbers, als die mittlere Höhe, auf welche das Quecksilber in diesem Orte, wo der Barometer gemacht wird, gewöhnlicher Weise zu steigen pfleget, welches blos durch längere Erfahrung bestimt werden kan. In Wien ist diese mittlere Höhe des Quecksilbers nach den von dem gelehrten Hr. Abt Liesganig gemachten langen Erfahrungen 28 Zoll 3 Linien Wiener Maas.

Wir übergehen andere Barometerarten, welche noch mehr zusammengesezt sind, obwohl sie ebenfals ihre Verdienste haben.

Obwohl die Barometer eigentlich nichts anders als die Veränderungen des Drucks und der Schwere des Dunstkreises anzeigen, so werden sie dennoch sehr oft und fast gemeiniglich zur Vorhersagung des Wetters, wiewohl nicht allezeit mit der erwünschten Gewisheit gebraucht; weil die Veränderung desselben würklich grossen Teils von der

meh-

mehrer oder wenigern Schwere der Luft abhanget. In dieser Absicht wird auch die abgemeßte Skale zur Anzeige des verschiedenen Wetters darnach eingerichtet, wie man insgemein an Barometern sehen kan. Nur komt es in solchen Falle hauptsächlich darauf an, daß der Punkt der Skale, welche der mittlere ist, und das veränderliche Wetter anzuzeigen hat, in der rechten Höhe über die Fläche des Quecksilbers in dem Gefäse angehäftet werde; als welche mit der Nr. 6. gemeldten mittlern Höhe einerlei ist.

Erfahrung.

§. 399. Wenn man die Höhe des Quecksilbers im Barometer in zween Orten, welche in verschiedener Höhe über die Seefläche liegen, beobachtet, so findet man, daß sie in dem höhern niederer, und in dem tiefern höher seie.

Die Ursach dessen ist, weil die Luftsaule des Dunstkreises, welche auf die untere Oefnung der Röhre, oder auf das Quecksilber in dem Gefäse drücket, in höhern Orten kürzer, und in tiefern länger wird, und folglich im ersten Falle leichter, im andern aber schwerer ist, so kan sie auch das Quecksilber in höhern Orten nicht so hoch als in tiefern drücken.

Zusaz.

§. 400. Wenn man demnach wüßte, um wie viel das Quecksilber in Orten von verschiedener Höhe steigen oder fallen müsse, so gäbe dieses ein sehr bequemes Mittel an die Hand, wenigstens etwas beträchtlichere Höhenunterschiede zweier Oerter zu messen; welches

durch den Weg der Geometrie in vielen Fällen oft sehr weitläuftig und mühesam ist.

Man hat sich schon viele Mühe gegeben, eine gewisse Regel zu entdecken, nach welcher man die Höhenunterschiede zweier Oerter aus den in denselben zu gleicher Zeit beobachten Barometerhöhen finden könte; aber unter allen Entdeckungen, so hierüber an Tage gekommen, ist meines Wissens noch keine gefunden worden, welche in allen Fällen ein vollkommenes Genügen geleistet hätte, wenn nach denselben Erfahrungen angestelt worden. Einige treffen zwar bei grössern Höhen ziemlich nahe ein, bei kleinern aber zeigen sich öfters sehr starke Abweichungen, und bei andern ereignet sich gerade das Gegenteil von ienen. Um aber dennoch die Neugierde einiger Anfänger in etwas zu befriedigen, so wollen wir eine Regel nur in kurzen anführen, welche von Hr. Kästner in seinen Anmerkungen über die Markscheidekunst angegeben wird. Die Gründe davon müssen wir in gegenwärtigen Anfangsgründen nothwendig übergehen, weil sie von der höhern Mathematik abhangen. Die eigentliche Verfahrungsart bestehet aber in folgenden:

Fig. 138. 1. Wenn AB der Höhenunterschied zweier Oerter A und B zu suchen, und AC die Höhe eines dritten beliebigen Orts C über A entweder schon bekant wäre, oder leicht geometrisch gemessen werden könte, so beobachtet soviel möglich zu gleicher Zeit die Barometerhöhen sowohl in A als C und B, und messet auch die Höhe AC, im Fall sie noch unbekant ist.

2. Zie-

2. Ziehet den Logarithmus der Barometerhöhe in B von dem Logarithmus der Barometerhöhe in A ab, welche ihr in Linien oder noch kleinern Teilen beobachtet habt, und sehet diesen Unterschied als eine Naturalzahl an, die wir hier mit D ausdrücken wollen.

3. Ziehet auch den Logarithmus der Barometerhöhe in C von dem Logarithmus der Barometerhöhe in A ab, und sehet diesen Unterschied ebenfals als eine Naturalzahl an; welche wir mit d benennen.

4. Suchet sowohl zu D als d die Logarithmen durch Annäherung, wenn sie auch in ihren letzten Zahlen nicht vollkommen richtig sind.

5. Addiret den Logarithmus von D und den von der z. B. in Klaftern oder Schuhen bekanten oder gemessenen Höhe AC zusammen, und ziehet von der Summe den Logarithmus von d ab, so ist der Uberrest der Logarithmus von der gesuchten Höhe AB; dessen Naturalzahl in den Tafeln die Anzahlklafter oder Schuhe von AB anzeiget.

Beispiel.

Es seie die Barometerhöhe in A = 330 Linien,
. . . . in C = 328
. . . . in B = 300
die gemessene Höhe AC . . . . = 127 Klafter

so ist Log. A = 2,5185139
Log. B = 2,4771213

0,0413926 = D.

und Log. A = 25185139
Log. C = 25158738

26401 = d

Log. D = 56168954
Log. d = 44216039

ferner Log. D = 5,6168954
Log. AC = 2,1038037

7,7206991
Log. d = 4,4216039

Log. AB = 3,2990952 = 1991 Kl.

Erfahrung.

Fig. 139. §. 401. Wenn man eine gläserne hohle Kugel A, welche mit einer langen aber engen Röhre AB versehen ist, mit einer flüssigen Materie z. B. mit Weingeist, oder Quecksilber füllet, daß dieselbe noch einen Teil als etwann bis in C in die Röhre reichet; hierauf aus dem übrigen Teil CB die Luft austreibet, und denn das Ende B zuschmelzet, so dehnet sich die flüssige Materie in der Kugel aus, und steiget in der Röhre weiter über C hinauf, wenn die äussere Luft, so die Kugel umgiebt, wärmer wird; ziehet sich aber zusammen, oder fallet unter C hinab, wenn die äussere Luft kälter wird, und dieses steigen oder fallen geschihet nach dem Verhältnis als die äussere Luft wärmer oder kälter wird.

Zusatz.

§. 402. Da die Röhre volkommen geschlossen ist, und also kein Druck der Luft auf die flüssige Materie, welche in der Kugel enthalten ist, eine Würkung haben kan, so muß ihre Ausdehnung und Zusammenziehung,

hung, oder das Steigen und Fallen derselben in der Röhre blos von der mehr und wenigern Wärme der äussern Luft, als welche endlich auch die eingeschlossene flüssige Materie erwärmet, herrühren; und da das Steigen und Fallen nach Verhältnis der mehr oder wenigern Wärme der äussern Luft geschihet, so giebt dieses Gelegenheit die Unterschiede der Wärme der Luft oder anderer flüssiger Materien wahrzunehmen.

Erklärung.

§. 403. Ein Instrument, mit welchem man die Wärme oder Kälte der Luft oder anderer flüssigen Materien beobachten kan, wird ein Thermometer genent.

Bei Verfertigung eines Thermometers hat man hauptsächlich folgendes in acht zu nehmen:

1. Erwählet ein vollkommen gleichweites gläsernes Rohr, mit einer Kugel, die nicht viel über, und auch nicht viel unter einen halben Zoll im Durchmesser hat. Man erkennet aber, ob das Rohr gleichweit ist, wenn man nur soviel Quecksilber hinein läßt, daß es einen Cylinder von ungefähr einen halben Zoll in der Länge machet, hierauf denselben langsam durch die Röhre gehen lasset, und zusiehet, ob derselbe in allen Stellen des Rohrs eine gleiche Länge behält; welches alsdenn ein Zeichen ist, daß das Rohr an keinen Orte weiter oder enger seie.

2. Obwohl man sich zur Füllung eines Thermometers einer beliebigen flüssigen Materie bedienen könte, so ziehet man doch das Quecksilber wegen seiner Beständigkeit, und gleichförmigen

Ausdehnung, und weil es fast in der grösten bekanten Kälte seine Flüssigkeit behält, gemeiniglich allen übrigen vor. Daher hält man sehr wohl gereinigtes Quecksilber in Bereitschaft, erwärmet die Kugel und das Rohr, damit die darinn befindliche Luft ausgetrieben werde; stecket hierauf das Ende des Rohrs in das Quecksilber, bis die ganze Kugel und ein Teil des Rohres selbst damit angefüllet ist.

3. Stellet nun die Kugel in eine sehr kalte Materie, z. B. in gesalzenen Schnee oder Eis, um nach einer kleinen Weile zu sehen, wie weit das Quecksilber in der Röhre falle; denn wenn dasselbe gänzlich in die Kugel zurück gienge, so wäre es ein Zeichen, daß noch zu wenig in der Röhre wäre, und müste in solchem Falle noch etwas mehr Quecksilber nachgefüllet werden, bis daß auch bei der grösten Kälte noch etwas davon im Rohr zurück bleibet.

4. Suchet die bei dem Füllen sich in die Kugel verschlagene Luftblasen, oder durch sanftes stossen und ruteln, oder durch die Wärme herauszutreiben, bis das Quecksilber ganz dicht erscheinet.

5. Treibet auch die Luft durch die Hitze aus dem leeren Teil der Röhre, und schmelzet sie darauf oben zu.

6. Stellet alsdenn die Kugel in zerstossenes Eis, welches eben zu fliessen anfangen will, beobachtet nach einer kleinen Weile die Höhe des Quecksilbers in der Röhre, und bemerket diesen Punkt mit einen um dieselbe gebundenen Seiden-

faden,

faden, oder Pferdhaar D; so wird dieser Punkt den Eis oder Gefrierpunkt andeuten; erwärmet hierauf die Kugel wieder nach und nach, und stellet sie in ein Wasser, welches eben zu sieden anfangt; bemerket, abermal nach einer kleinen Weile die Höhe des Quecksilbers in der Röhre, mit einen umgebundenen Faden E, so hat man auch den Punkt für die Hitze des siedenden Wassers bestimmet. Fig. 139.

7. Nehmet den Abstand des Eispunkts von dem des siedenden Wasserhitze mit einem Zirkel, und traget ihn auf eine an einem eigens zubereiten Bretlein gezogene gerade Linie; teilet ihn in 80 gleiche Teile; formiret eine ordentliche Skale daraus, welche man auch noch unter den Gefrierpunkt verlängert; und setzet zu dem Gefrierpunkt 0, auf und abwärts demselben aber zu den übrigen Teilungspunkten, die natürlichen Zahlen. Befestiget endlich die Röhre dergestalt an diesem Bretlein, daß beide mit den Fäden bemerkte Hauptpunkten mit eben denselben auf der Skale übereinkommen, so hat man einen nach Reaumursart eingeteilten Thermometer, welcher am meisten üblich ist.

Wil man noch die Grade der Hitze und Kälte von andern Sachen z. B. vom siedenden Oehl, von der Hitze des Bluts in einen tödtlichen Fieber, oder eines gesunden Menschen, temperirte Zimmerhitze, die gröste Kälte von einem gewissen Jahr und Orte, u. m. d. gl. darauf anmerken, so kan man sie entweder durch eigene Erfahrungen bestimmen, oder von andern Thermometerobachtungen nehmen.

eines andern von eben der Art vergleichen. Kurz es lassen sich damit zwar die vorgehende Veränderungen der Feuchte und Trockne der Luft, aber nicht ihre eigentliche Grösse wahrnehmen.

Drittes Hauptstück.

Von der Bewegung der Luft, und von dem Widerstand, den sie gegen andere in ihr bewegte Körper ausübet.

Erklärung.

§. 407. Wenn die Luft aus was immer für einer Ursache an einem Orte dünner oder dichter als in einem andern benachbarten wird, und dadurch gezwungen ist, so lang von einem Orte nach dem Andern zu strömmen, bis sie sich wieder in das Gleichgewicht gesetzet, oder gleiche Dichtigkeit erhalten hat, so wird die daher entstandene Bewegung derselben der Wind genent.

Zusatz.

§. 408. Was also immer die Luft auszudehnen oder zusammenzudrücken vermag, kan auch als eine Ursache des Windes angesehen werden; und weil die zusammengedrückte oder ausgedehnte Luft wegen ihrer natürlichen Federkraft um so mehr widerstehet, als sie mehr zusammengedrückt oder ausgedehnt ist, so mus auch die dadurch entstehende Bewegung, durch welche sie sich wieder in das Gleichgewicht zu setzen trachtet, um so geschwinder, und folglich der Wind um so häf-

tiger

tiger sein, als die Luft an einem Orte dichter oder dünner als an einem andern benachbarten ist.

Lehrsaz.

§. 409. Die Luft widerstehet einem ieden in ihr bewegten Körper nach dem Verhältnis ihrer Dichtigkeit.

Beweis: Da die Luft ein Körper ist, so hat ein iedes Teilchen so klein es auch sein mag, eine Kraft der Trägheit, vermög welcher es sich in dem Zustande zu erhalten sucht, in dem es würklich ist; folglich widerstehet ein iedes Luftteilchen der Bewegung eines Körpers, der es aus seiner Stelle zu drücken suchet, gleich viel; ie dichter aber die Luft ist, ie mehrere solche Teilchen enthält sie auch in einem nehmlichen Raume, folglich um so mehrere mus der bewegte Körper aus ihrer Stelle drücken, also da sich die Anzahl der Luftteilchen wie die Dichtigkeiten der Luft verhalten, so verhält sich auch der Widerstand der Luft wie ihre Dichtigkeit.

Zusaz.

§. 410. Ein in der Luft bewegter Körper mus also immer an seiner Geschwindigkeit etwas verlieren, weil ihm die Luft so lang er sich beweget, immer widerstehet; und dieser Verlust ist um so grösser als die Luft dichter ist.

Zusaz.

§. 411. Es mag sich ein Körper gegen die Luft, oder diese gegen ienen bewegen, so ist doch der Widerstand gleich gros, wenn nur die Geschwindigkeit in beiden Fällen gleich ist, und die Luft gleiche Dichtigkeit hat.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 412. Die Luft widerstehet einem in ihr bewegten Körper nach dem Verhältnis der Oberfläche, gegen welche sie perpendikular anstosset.

Beweis. Je grösser die Oberfläche des bewegten Körpers, gegen welche die Luft perpendikular anstosset, ist, um so mehrere Lufttheilchen mus auch der Körper in gleichen Zeiten, aus ihrer Stelle treiben; da aber die Grösse des Widerstandes von der Menge dieser Teilchen abhanget, so mus sich derselbe wie die Oberfläche gegen welche die Luft perpendikular anstosset, verhalten.

Zusatz.

§. 413. Ein Körper, der sich mit einer grössern Fläche als ein anderer gerade gegen die Luft oder mit mehrer Geschwindigkeit bewegt, mus daher mehr von seiner Geschwindigkeit verlieren als iener.

Zusatz.

§. 414. Obwohl die Luft den bewegten Körpern nach dem Verhältnis ihrer Oberflächen widerstehet, und also von zwoen bewegten Kugeln von ungleichen Durchmessern, und gleicher Geschwindigkeit die grössere einen grössern Widerstand in Ansehung der kleinern leidet, so wird doch die Kraft der Bewegung der kleinern durch den Widerstand der Luft eher als in der grössern vernichtet, weil die Bewegungskraft der Körper aus dem Produkte der Massen in die Geschwindigkeit bestehet, und dieselbe in der grössern Kugel um soviel grösser ist, als sie mehr Masse hat als die kleinere; hingegen der Widerstand der Luft nur nach dem Verhältnis ihrer Oberflächen, oder nach den Quadraten ihrer Durchmesser zu rechnen ist, die gegen einander ein kleineres Verhältnis haben. Daraus ist also zu ersehen, daß die Würkungen selbst des Widerstandes nicht soviel

aus

aus seiner Grösse allein, als aus dem Verhältnis desselben, oder der Oberfläche zum Gewicht oder der Masse der Kugel zu beurteilen sei. Wenn man sich demnach zwo Kugeln von gleicher Materie vorstellet, wovon aber der Durchmesser der einen dopelt so gros als der anderen ist, so wird das Gewicht der grössern zu dem der kleinern wie 8 : 1, hingegen ihre Oberflächen nur wie 4 : 1 sein. Obwohl nun der Widerstand der grössern viermal grösser ist als der kleinern, so wird doch die Würkung des Widerstandes der ersteren zu der der andern Kugel nur wie $\frac{4}{8}$: $\frac{1}{1}$ oder $\frac{1}{2}$: 1 sein; wenn man nehmlich annimt, daß ihre Geschwindigkeiten anfänglich gleich sind. Ja es kan sogar geschehen, daß eine grössere Kugel anfänglich eine kleinere Geschwindigkeit als eine andere die kleiner ist, hat, und dennoch ihre Bewegungskraft später als iene verlieret, und also weiter gehet. Überhaupt kan man aus allen diesen abnehmen, daß, wenn zwo Kugeln von gleicher Materie aber ungleichen Durchmessern durch proportionirte Kräften bewegt werden, auch auf eine gleiche Weite gehen würden, wenn kein Widerstand der Luft vorhanden wäre; und das die grössere würklich nur um soviel weiter als die kleinere gehet, als die Würkung des Widerstandes bei der ersteren geringer als bei der andern ist. Das ist also die wahre Ursach, warum eine Kannone von grösseren Kaliber weiter als eine von kleinern schiesset, wenn beide ähnlich sind, und mit gleich proportionirter Pulverladung zu ihrer Kugelschwere geladen werden.

Lehrsatz.

§. 415. Die Widerstände, welche zween gleiche mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegte Körper in gleich dichter Luft zu leiden haben, verhalten sich wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten.

Be-

Beweis. Betrachtet, daß mit ie grösserer Geschwindigkeit ein Körper bewegt wird, ie mehr ihm auch die Luft widerstehet, §. 413. und um so mehrere Luftteilchen hat er auch in der nehmlichen Zeit zu überwinden. Wenn daher der Widerstand der Luftteilchen gegen einen Körper, der nur eine einfache Geschwindigkeit hat, = 1 ist, so ist derselbe gegen einen Körper der z. B. eine dreifache Geschwindigkeit hat = 3; da nun der andere wegen seiner grössern Geschwindigkeit auch 3mal mehrere solche Luftteilchen in der nehmlichen Zeit zu überwinden hat, so ist der Widerstand den er leidet, noch 3mal grösser, und also = 9; und folglich ist der Widerstand beider Körper wie 1:9, oder wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten.

Zusaz.

§. 416. Wenn also zween Körper von ungleicher Oberfläche und mit verschiedener Geschwindigkeit in der Luft von verschiedener Dichtigkeit bewegt werden, so sind die Widerstände, die sie von der Luft zu leiden haben, in zusammengesezter Verhältnis ihrer Oberflächen, der Quadrate ihrer Geschwindigkeiten, und der Dichtigkeiten der Luft. D. i. wenn S und s ihre Oberflächen, V und v, die Geschwindigkeiten, D und d die Dichtigkeiten der Luft, und R und r die Widerstände ausdrücken, so ist

$$R : r = SV^2D : sv^2d.$$

Doch sind viele Gelehrte der Meinung, daß dieses Gesez nur so lang richtig seie, als die Geschwindigkeit des bewegten Körpers so gros ist, daß der hinter demselben entstehende leere Raum durch die eindringende Luft gleich wieder erfüllet werden könne, sobald aber die Geschwindigkeit grösser ist, als daß die Luft geschwind genug fol-

gen kan, welches nach Hr. Eülers Meinung für eine Sekunde 1348 rheinländische Schuh beträgt, so solle auch der Widerstand der Luft noch in einem weit grössern Verhältnis als die Quadrate der Geschwindigkeiten anwachsen, weil der bewegte Körper in einem solchen Falle nicht allein die Kraft der Trägheit der Luft, sondern auch zu gleich den Druck, der vor dem Körper befindlichen Luftsäule, welchen sie gegen den hinten her entstehenden leeren Raum ausübet, zu überwinden hat.

Zusaz.

§. 417. Da also die Luft einen iehen in ihr bewegten Körper stäts widerstehet, so mus eine iede gleichförmige Bewegung in eine abnehmende verwandelt werden; da aber ein ieder horizontal geschossener oder geworfener Körper, wenn er durch seinen Flug eine Parobol beschreiben sol, eine gleichförmige, und eine beschleinigte Bewegung haben mus, §. 77 u. 84. so kan die Fluglinie eines in der Luft geschossenen oder geworfenen Körpers niemal eine wahre Parabol sein, sondern derselbe mus eine andere Gattung einer krummen Linie beschreiben, die von der Parabol um so mehr abweichet, als der Widerstand der Luft, oder die Geschwindigkeit des Körpers grösser ist, wodurch also alle Wurf oder Schußweiten kürzer ausfallen müssen.

Es würde nicht sehr schwer sein die krume Linie so durch einen in der Luft geschossenen oder geworfenen Körper beschrieben wird, zu bestimmen, wenn man die Grösse des Widerstandes der Luft und die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers in allen Fällen richtig voraus bestimmen könte. Aus den angeführten Sätzen lassen sich zwar

die Verhältnisse des Widerstandes angeben, aber noch nicht die würkliche Grösse desselben herleiten. Die Schwierigkeiten dabei kommen teils von dem Mangel einer nähern Kenntnis der Eigenschaften der Luft; teils auch von den beständigen Veränderungen derselben her. Die gröste Gelehrte sind hierüber in ihren Meinungen noch verschieden. Bezout in seinen mathematischen Kurs ist mit andern der Meinung, daß der Widerstand, den ein bewegter Körper in einer nicht elastischen flüssigen Materie z. B. im Wasser zu leiden hat, dem Gewichte eines Prisma dieser Materie gleich seie, welches die stossende Fläche des Körpers zur Grundfläche, die dopelte Höhe aber, über welche ein Körper fallen müste, um eine gleiche Geschwindigkeit, mit der er gegenwärtig bewegt wird, zu erhalten, zur Höhe hat. Bei einer elastischen flüssigen Materie aber, wie nehmlich die Luft ist, sol ein dopeltes Gewicht eines eben solchen Prisma dem Widerstand gleich sein; oder welches einerlei ist, man sol die stossende Fläche des Körpers mit der vierfachen Höhe, von der ein Körper fallen müste um die Geschwindigkeit des bewegten zu erlangen, multipliciren, und ihr Gewicht für den Widerstand nehmen. Euler hingegen sagt in seinen Erläuterungen der neuen Grundsäzen der Artillerie von Robins pag. 470. Daß man im Stande seie, die meisten über den Widerstand sowohl der Luft als des Wassers angestelte Experimente zu erklären, wenn man annimt, daß der Widerstand eines nach seiner Länge bewegten Cylinders gleich seie dem Gewichte eines gleich dicken aus eben der flüssigen Materie bestehenden Cylinder, dessen Höhe derie-

nigen

nigen gleich ist, wodurch die Geschwindigkeit des bewegten Cylinders ausgedrückt wird. Er erinnert aber auch zugleich in der folgenden Anmerkung, daß dieses nur von demjenigen Teil des Widerstandes zu verstehen seie, welcher aus dem würklichen Anstose des Körpers an die Teilchen der flüssigen Materie entspringet, und nur bei langsamen Bewegungen staat hat; daß aber der Widerstand noch um vieles vergrössert werde, wenn die Geschwindigkeit des bewegten Körpers grösser ist, als daß die Luft den hinter dem Körper entstehenden leeren Raum also gleich wieder ausfüllen kan. Da nun die Luft in einen leeren Raum mit einer Geschwindigkeit von 29100 rheinländischen Schuhen eindringet, welches auf 1 Sekunde 1348 Schuh beträgt, so könte diese Regel nur staat finden, so lang die Geschwindigkeit des bewegten Körpers in 1 Sekunde noch unter 1348 Schuh wäre; sobald aber die Geschwindigkeit noch grösser ist, so würde man die besagte Höhe der Luftsäule, deren Gewicht den Widerstand ausdrückt, noch um 29100 rheinländische Schuhe grösser annehmen müssen, um in solchem Falle den gesamten Widerstand zu erhalten. Es ist also leicht zu erachten, daß man auch diese Höhe noch vergrössern müssen würde, wenn die Geschwindigkeit des bewegten Körpers noch grösser wäre, und folglich der Druck der Luft von vorne her noch vermehret würde.

Aus allen diesen erhellet, wie verschieden die Meinungen von der Bestimmung der eigentlichen Grösse des Widerstandes der Luft sind; wenn man aber aufmerksamer überlegt, welchen Veränderungen die Luft unterworfen ist, [illegible] wenig man

noch die eigentliche Würkungen des Pulvers kennet, und wie schwer es ist, die anfängliche Geschwindigkeit einer abgeschossenen, oder geworfenen Kugel richtig zu bestimmen, so wird man sich auch leicht vorstellen können, wie vielen Schwierigkeiten die Bestimmung der Grösse des Widerstands der Luft unterworfen seie. Indessen müssen wir uns mit der Hofnung befriedigen, daß man durch den Fleiß geschickter Männer, und mehrere über diesen Gegenstand eigens angestelte Versuche mit der Zeit wenigsten der Wahrheit näher kommen werde.

Fünfter Abschnit.

Von der Bewegung der flüssigen Materien, hauptsächlich aber des Wassers.

Erstes Hauptstück.

Von der Bewegung der flüssigen Materien durch ihre eigene Schwere.

Lehrsaz.

§. 418.

Wenn zwei mit einer flüssigen Materie z. B. mit Wasser angefülte Gefäse gleiche Höhen und unten gleiche Oefnungen haben, und stäts vol erhalten werden, so fliesset aus beiden in gleichen Zeiten eine gleiche Menge Wassers.

Be-

Beweis: Da vermög Voraussetzung beide Gefäse gleiche Höhen, und Oefnungen haben, so sind auch die Wassersäulen, welche auf die Oefnungen drücken einander gleich, und wenden ein gleiches Bemühen an die unterste Wasserfläche durch die Oefnung zu drücken, also mus auch in gleicher Zeit durch dieselbe eine gleiche Menge Wasser ausfliessen.

Lehrsaz.

§. 419. Die Mengen des durch zwo gleiche Oefnungen zweier ungleichhohen Gefäsen in gleicher Zeit ausfliessenden Wassers verhalten sich wie die Geschwindigkeiten. Fig. 140.

Beweis: Es seie in den zwei Gefäsen A und B der Flächeninhalt ihrer Oefnungen nach der Voraussezung = L = l, und H und h die Höhen der in gleicher Zeit ausgeflossenen Wassersäulen, so sind HL und hl die Mengen des aus ieden Gefäs ausgeflossenen Wassers, da nun L = l ist, und man H und h als die Geschwindigkeiten des ausfliessenden Wassers ansehen kan, so ist HL : hl = H : h, §. 283. Geomet. d. i. die Mengen des durch zwo gleiche Oefnungen in gleicher Zeit ausfliessenden Wassers verhalten sich wie die Geschwindigkeiten.

Lehrsaz.

§. 420. Wenn zwei allezeit gleich volle Gefäse gleiche Oefnungen aber ungleiche Höhen haben, so verhalten sich die Geschwindigkeiten des in gleicher Zeiten aus denselben fliessenden Wassers wie die Quadratwurzeln der Höhen der Gefäsen.

Beweis: Betrachtet, daß, wenn L und l die Oefnungen, OD und EF die Höhen der beiden Ge-

Lehrsaz.

§. 412. Die Luft widerstehet einem in ihr bewegten Körper nach dem Verhältnis der Oberfläche, gegen welche sie perpendikular anstosset.

Beweis. Je grösser die Oberfläche des bewegten Körpers, gegen welche die Luft perpendikular anstosset, ist, um so mehrere Luftteilchen mus auch der Körper in gleichen Zeiten aus ihrer Stelle treiben; da aber die Grösse des Widerstandes von der Menge dieser Teilchen abhanget, so mus sich derselbe wie die Oberfläche gegen welche die Luft perpendikular anstosset, verhalten.

Zusaz.

§. 413. Ein Körper, der sich mit einer grössern Fläche als ein anderer gerade gegen die Luft oder mit mehrer Geschwindigkeit bewegt, mus daher mehr von seiner Geschwindigkeit verlieren als iener.

Zusaz.

§. 414. Obwohl die Luft den bewegten Körpern nach dem Verhältnis ihrer Oberflächen widerstehet, und also von zwoen bewegten Kugeln von ungleichen Durchmessern, und gleicher Geschwindigkeit die grössere einen grössern Widerstand in Ansehung der kleinern leidet, so wird doch die Kraft der Bewegung der kleinern durch den Widerstand der Luft eher als in der grössern vernichtet, weil die Bewegungskraft der Körper aus dem Produkte der Massen in die Geschwindigkeit bestehet, und dieselbe in der grössern Kugel um soviel grösser ist, als sie mehr Masse hat als die kleinere; hingegen der Widerstand der Luft nur nach dem Verhältnis ihrer Oberflächen, oder nach den Quadraten ihrer Durchmesser zu rechnen ist, die gegen einander ein kleineres Verhältnis haben. Daraus ist also zu ersehen, daß die Würkungen selbst des Widerstandes nicht soviel

aus

aus seiner Grösse allein, als aus dem Verhältnis desselben, oder der Oberfläche zum Gewicht oder der Masse der Kugel zu beurteilen seie. Wenn man sich demnach zwo Kugeln von gleicher Materie vorstellet, wovon aber der Durchmesser der einen dopelt so gros als der andern ist, so wird das Gewicht der grössern zu dem der kleinern wie 8 : 1, hingegen ihre Oberflächen nur wie 4 : 1 sein. Obwohl nun der Widerstand der grössern viermal grösser ist als der kleinern, so wird doch die Würkung des Widerstandes der ersten zu der der andern Kugel nur wie $\frac{4}{8} : \frac{1}{1}$ oder $\frac{1}{2}$: 1 sein; wenn man nehmlich annimt, daß ihre Geschwindigkeiten anfänglich gleich sind. Ja es kan sogar geschehen, daß eine grössere Kugel anfänglich eine kleinere Geschwindigkeit als eine andere die kleiner ist, hat, und dennoch ihre Bewegungskraft später als iene verlieret, und also weiter gehet. Überhaupt kan man aus allen diesen abnehmen, daß, wenn zwo Kugeln von gleicher Materie aber ungleichen Durchmessern durch proportionirte Kräften bewegt werden, auch auf eine gleiche Weite gehen würden, wenn kein Widerstand der Luft vorhanden wäre; und das die grössere würklich nur um soviel weiter als die kleinere gehet, als die Würkung des Widerstandes bei der erstern geringer als bei der andern ist. Das ist also die wahre Ursach, warum eine Kannone von grösserm Kaliber weiter als eine von kleinern schiesset, wenn beide ähnlich sind, und mit gleich proportionirter Pulverladung zu ihrer Kugelschwere geladen werden.

Lehrsaz.

§. 415. Die Widerstände, welche zween gleiche mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegte Körper in gleich dichter Luft zu leiden haben, verhalten sich wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten.

Be-

Beweis: Betrachtet, daß mit ie grösserer Geschwindigkeit ein Körper bewegt wird, ie mehr ihm auch die Luft widerstehet, §. 413. und um so mehrere Luftteilchen hat er auch in der nehmlichen Zeit zu überwinden. Wenn daher der Widerstand der Luftteilchen gegen einen Körper, der nur eine einfache Geschwindigkeit hat, = 1 ist, so ist derselbe gegen einen Körper der z. B. eine dreifache Geschwindigkeit hat = 3; da nun der andere wegen seiner grössern Geschwindigkeit auch 3mal mehrere solche Luftteilchen in der nehmlichen Zeit zu überwinden hat, so ist der Widerstand den er leidet, noch 3mal grösser, und also = 9; und folglich ist der Widerstand beider Körper wie 1:9, oder wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten.

Zusaz.

§. 416. Wenn also zween Körper von ungleicher Oberfläche und mit verschiedener Geschwindigkeit in der Luft von verschiedener Dichtigkeit bewegt werden, so sind die Widerstände, die sie von der Luft zu leiden haben, in zusammengesezter Verhältnis ihrer Oberflächen, der Quadrate ihrer Geschwindigkeiten, und der Dichtigkeiten der Luft. D. i. wenn S und s ihre Oberflächen, V und v, die Geschwindigkeiten, D und d die Dichtigkeiten der Luft, und R und r die Widerstände ausdrücken, so ist

$$R : r = SV^2D : sv^2d.$$

Doch sind viele Gelehrte der Meinung, daß dieses Gesez nur so lang richtig seie, als die Geschwindigkeit des bewegten Körpers so gros ist, daß der hinter demselben entstehende leere Raum durch die eindringende Luft gleich wieder erfüllet werden könne, sobald aber die Geschwindigkeit grösser ist, als daß die Luft geschwind genug fol-

gen

gen kan, welches nach Hr. Eülers Meinung für eine Sekunde 1348 rheinländische Schuh beträgt, so solle auch der Widerstand der Luft noch in einem weit grössern Verhältnis als die Quadrate der Geschwindigkeiten anwachsen, weil der bewegte Körper in einem solchen Falle nicht allein die Kraft der Trägheit der Luft, sondern auch zu gleich den Druck, der vor dem Körper befindlichen Luftsäule, welchen sie gegen den hinten her entstehenden leeren Raum ausübet, zu überwinden hat.

Zusaz.

§. 417. Da also die Luft einen ieden in ihr bewegten Körper stäts widerstehet, so mus eine iede gleichförmige Bewegung in eine abnehmende verwandelt werden; da aber ein ieder horizontal geschossener oder geworfener Körper, wenn er durch seinen Flug eine Parobol beschreiben sol, eine gleichförmige, und eine beschleinigte Bewegung haben mus, §. 77 u. 84. so kan die Fluglinie eines in der Luft geschossenen oder geworfenen Körpers niemal eine wahre Parobol sein, sondern derselbe mus eine andere Gattung einer krummen Linie beschreiben, die von der Parabol um so mehr abweichet, als der Widerstand der Luft, oder die Geschwindigkeit des Körpers grösser ist, wodurch also alle Wurf oder Schußweiten kürzer ausfallen müssen.

Es würde nicht sehr schwer sein die krume Linie so durch einen in der Luft geschossenen oder geworfenen Körper beschrieben wird, zu bestimmen, wenn man die Grösse des Widerstandes der Luft und die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers in allen Fällen richtig voraus bestimmen könte. Aus den angeführten Säzen lassen sich zwar

die Verhältnisse des Widerstandes angeben, aber noch nicht die würkliche Grösse desselben herleiten. Die Schwierigkeiten dabei kommen teils von dem Mangel einer nähern Kenntnis der Eigenschaften der Luft, teils auch von den beständigen Veränderungen derselben her. Die gröste Gelehrte sind hierüber in ihren Meinungen noch verschieden. Bezout in seinen mathematischen Kurs ist mit andern der Meinung, daß der Widerstand, den ein bewegter Körper in einer nicht elastischen flüssigen Materie z. B. im Wasser zu leiden hat, dem Gewichte eines Prisma dieser Materie gleich seie, welches die stossende Fläche des Körpers zur Grundfläche, die dopelte Höhe aber, über welche ein Körper fallen müste, um eine gleiche Geschwindigkeit, mit der er gegenwärtig bewegt wird, zu erhalten, zur Höhe hat. Bei einer elastischen flüssigen Materie aber, wie nehmlich die Luft ist, sol ein dopeltes Gewicht eines eben solchen Prisma dem Widerstand gleich sein; oder welches einerlei ist, man sol die stossende Fläche des Körpers mit der vierfachen Höhe, von der ein Körper fallen müste um die Geschwindigkeit des bewegten zu erlangen, multipliciren, und ihr Gewicht für den Widerstand nehmen. Euler hingegen sagt in seinen Erläuterungen der neuen Grundsätzen der Artillerie von Robins pag. 470. Daß man im Stande seie, die meisten über den Widerstand sowohl der Luft als des Wassers angestelte Experimente zu erklären, wenn man annimt, daß der Widerstand eines nach seiner Länge bewegten Cylinders gleich seie dem Gewichte eines gleich dicken aus eben der flüssigen Materie bestehenden Cylinder, dessen Höhe derie-

nigen

nigen gleich ist, wodurch die Geschwindigkeit des bewegten Cylinders ausgedrückt wird. Er erinnert aber auch zugleich in der folgenden Anmerkung, daß dieses nur von demjenigen Teil des Widerstandes zu verstehen seie, welcher aus dem würklichen Anstose des Körpers an die Teilchen der flüssigen Materie entspringet, und nur bei langsamen Bewegungen stat hat; daß aber der Widerstand noch um vieles vergrössert werde, wenn die Geschwindigkeit des bewegten Körpers grösser ist, als daß die Luft den hinter dem Körper entstehenden leeren Raum also gleich wieder ausfüllen kan. Da nun die Luft in einen leeren Raum mit einer Geschwindigkeit von 29100 rheinländischen Schuhen eindringet, welches auf 1 Sekunde 1348 Schuh beträgt, so könte diese Regel nur stat finden, so lang die Geschwindigkeit des bewegten Körpers in 1 Sekunde noch unter 1348 Schuh wäre; sobald aber die Geschwindigkeit noch grösser ist, so würde man die besagte Höhe der Luftsäule, deren Gewicht den Widerstand ausdrückt, noch um 29100 rheinländische Schuhe grösser annehmen müssen, um in solchem Falle den gesamten Widerstand zu erhalten. Es ist also leicht zu erachten, daß man auch diese Höhe noch vergrössern müssen würde, wenn die Geschwindigkeit des bewegten Körpers noch grösser wäre, und folglich der Druck der Luft von vorne her noch vermehret würde.

Aus allen diesen erhellet, wie verschieden die Meinungen von der Bestimmung der eigentlichen Grösse des Widerstandes der Luft sind; wenn man aber aufmerksamer überlegt, welchen Veränderungen die Luft unterworfen ist, [illegible] wenig man

noch die eigentliche Würkungen des Pulvers kennet, und wie schwer es ist, die anfängliche Geschwindigkeit einer abgeschossenen, oder geworfenen Kugel richtig zu bestimmen, so wird man sich auch leicht vorstellen können, wie vielen Schwierigkeiten die Bestimmung der Grösse des Widerstands der Luft unterworfen seie. Indessen müssen wir uns mit der Hofnung befriedigen, daß man durch den Fleiß geschickter Männer, und mehrere über diesen Gegenstand eigens angestelte Versuche mit der Zeit wenigsten der Wahrheit näher kommen werde.

Fünfter Abschnit.

Von der Bewegung der flüssigen Materien, hauptsächlich aber des Wassers.

Erstes Hauptstück.

Von der Bewegung der flüssigen Materien durch ihre eigene Schwere.

Lehrsaz.

§. 418.

Wenn zwei mit einer flüssigen Materie z. B. mit Wasser angefülte Gefäße gleiche Höhen und unten gleiche Oefnungen haben, und stäts vol erhalten werden, so fliesset aus beiden in gleichen Zeiten eine gleiche Menge Wassers.

Beweis: Da vermög Voraussezung beide Gefäse gleiche Höhen, und Oefnungen haben, so sind auch die Wassersäulen, welche auf die Oefnungen drücken einander gleich, und wenden ein gleiches Bemühen an die unterste Wasserfläche durch die Oefnung zu drücken, also mus auch in gleicher Zeit durch dieselbe eine gleiche Menge Wasser ausfliessen.

Lehrsaz.

§. 419. Die Mengen des durch zwo gleiche Oefnungen zweier ungleichhohen Gefäsen in gleicher Zeit ausfliessenden Wassers verhalten sich wie die Geschwindigkeiten. Fig. 140.

Beweis: Es seie in den zwei Gefäsen A und B der Flächeninhalt ihrer Oefnungen nach der Voraussezung = L = l, und H und h die Höhen der in gleicher Zeit ausgeflossenen Wassersäulen, so sind HL und hl die Mengen des aus ieden Gefäs ausgeflossenen Wassers, da nun L = l ist, und man H und h als die Geschwindigkeiten des ausfliessenden Wassers ansehen kan, so ist HL : hl = H : h, §. 283. Geomet. d. i. die Mengen des durch zwo gleiche Oefnungen in gleicher Zeit ausfliessenden Wassers verhalten sich wie die Geschwindigkeiten.

Lehrsaz.

§. 420. Wenn zwei allezeit gleich volle Gefäse gleiche Oefnungen aber ungleiche Höhen haben, so verhalten sich die Geschwindigkeiten des in gleichen Zeiten aus denselben fliessenden Wassers wie die Quadratwurzeln der Höhen der Gefäsen.

Beweis: Betrachtet, daß, wenn L und l die Oefnungen, OD und EF die Höhen der beiden Ge-

fenen, und C und c die Geschwindigkeiten des ausfliessenden Wassers sind, der Druck, welcher durch die über die Oefnungen stehenden Wassersäulen geschihet, wie $L \times OD : l \times EF$, und weil $L = l$ angenommen ist, wie $OD : EF$ seie, §. 283. Geom.; nicht minder, daß die aus beiden Gefäsen in gleicher Zeit ausfliessende Mengen Wassers wie $L \times C : l \times c$, und folglich die Bewegungskräften dieser Mengen wie die Produkte aus den Mengen in ihre Geschwindigkeiten d. i. wie $L \times C \times c : l \times c \times c$ oder wie $LC^2 : lc^2$ seie. Nun aber kan man diese Bewegungskräften als die Würkungen des Druckes der in den Gefäsen enthaltenen Wassersäulen ansehen, und die Würkungen sind ihren Ursachen gleich, also ist $LC^2 : lc^2 = OD : EF$, und weil $L = l$, so ist: $C^2 : c^2 = OD : EF$, folglich $C : c \sqrt{OD} : \sqrt{EF}$. D. i. die Geschwindigkeiten des ausfliessenden Wassers verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Höhen der Gefäsen.

Zusaz.

§. 421. Da sich die Mengen des durch zwo gleiche Oefnungen in gleicher Zeit ausfliessenden Wassers wie ihre Geschwindigkeiten verhalten §. 419., und diese wie die Quadratwürzeln der Höhen der Gefäsen sind, §. 420., so verhalten sich auch die durch zwo gleiche Oefnungen in gleicher Zeit ausfliessende Mengen wie die Quadratwurzeln der Höhen der Gefäse.

Zusaz.

§. 422. Wären die Oefnungen zweier Gefäsen ungleich, die Höhen derselben aber gleich, und folglich auch die Geschwindigkeiten, so würden sich die in gleichen Zeiten ausfliessende Mengen Wassers wie die Flächeninhalte der Oefnungen verhalten. Ferner da die

Flä-

Flächeninhalte zweener Zirkel wie die Quadrate ihrer Durchmesser sind §. 223. Geomet. so werden auch die durch zirkelförmige Oefnungen in gleicher Zeit ausfliessende Mengen Wassers sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten.

Zusaz.

§. 423. Sind sowohl die Oefnungen als Höhen zweier Gefäsen ungleich, so stehen die in gleicher Zeit durch dieselben ausfliessende Mengen Wassers in einer zusammengesezten Verhältnis aus den Verhältnissen der Flächeninhalte ihrer Oefnungen, und Quadratwurzeln ihrer Höhen, d. i. nach der vorigen Benennung $LC : lc = L \times \sqrt{OD} : l \times \sqrt{EF}$.

Zusaz.

§. 424. Wenn man auch annimt, daß sowohl die Oefnungen L und l als die Höhen OD und EF ungleich sind, so ist dennoch $LC^2 : lc^2 = L \times OD : l \times EF$ §. 420., und folglich auch $C^2 : c^2 = OD : EF$, und $C : c = \sqrt{OD} : \sqrt{EF}$. D. i. wenn auch die Oefnungen ungleich sind, so verhalten sich die Geschwindigkeiten des ausfliessenden Wassers dennoch wie die Quadratwurzeln der Höhen des Wassers über die Oefnungen; folglich wird das Wasser aus zweien Gefäsen von gleicher Höhe allezeit mit gleicher Geschwindigkeit ausfliessen, wenn auch die Oefnungen ungleich sind.

Zusaz.

§. 425. Da die eben an der Oefnung befindliche Wasserfläche von einer Wassersäule gedrückt wird, welche die Höhe des Gefäses zu ihrer Höhe hat, so wird die Geschwindigkeit des Wassers bei der Oefnung so

gros seyn, als ob es von der Oberfläche des in dem Gefäße enthaltenen Wassers bis zur Oefnung frei gefallen wäre.

Zusatz.

§. 426. Weil die Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers aus einem immer vollen Gefäße allezeit gleich bleibet, so verhalten sich die in verschiedenen Zeiten ausfliessenden Mengen wie diese Zeiten, d. i. in einer dopelten dreifachen Zeit fliesset auch eine dopelte oder dreifache Menge Wasser durch eine nehmliche Oefnung.

Fig. 141. Das was hier von dem Ausfluß des Wassers durch Oefnungen in der Grundfläche der Gefäßen erwiesen worden, läßt sich auch von Oefnungen erweisen, welche an der Seite wie A, oder schief wie B, oder gerade wie C angebracht sind; nur wird das Wasser bei B und C wegen dem Widerstand, welchen die Schwere der bereits herausgedrungenen Wassertheilchen gegen die noch zurückbefindlichen ausübet, etwas langsamer als in andern Fällen ausfliessen.

Lehrsatz.

§. 427. Die Zeiten, in welchen zwei prismatische Gefäße von gleichen Höhen und Oefnungen sich ausleeren, verhalten sich wie die Grundflächen dieser Gefäße.

Beweis. Da aus beiden Gefäßen wegen ihren gleichen Höhen und Oefnungen in gleicher Zeit eine gleiche Menge Wasser ausfliesset (§. 418.), so muß das grössere Gefäß A eine um so längere Zeit als das kleinere B zum ausfliessen brauchen, als der Kubikinhalt des erstern grösser als der des andern ist; die Zeiten verhal-

halten sich also wie die Kubikinhalte; diese aber sind wegen den gleichen Höhen wie die Grundflächen §. 283. Geomet. also verhalten sich auch die Zeiten der Ausleerung wie die Grundflächen der Gefäse.

Zusatz.

§. 428. Da durch eine grössere Oefnung eine grössere Menge Wasser ausfliesset, als in der nehmlichen Zeit durch eine kleinere, folglich bei der grössern Oefnung eine um so kürzere Zeit zur Ausleerung nöthig ist, so müssen die Zeiten der Ausleerung zweier Gefäsen von gleicher Höhe aber von ungleichen Oefnungen in einer zusammengesetzten Verhältnis und zwar aus der geraden der Grundflächen der Gefäsen, und umgekehrten ihrer Oefnungen stehen.

Lehrsatz.

§. 429. Die Zeiten, in welchen zwei prismatische Gefäse von gleichen Grundflächen und Oefnungen aber von ungleichen Höhen ausfliessen, verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus diesen Höhen.

Beweis: Man setze, es seie die Höhe OD : EF Fig. 140. = 4 : 1, so sind die Geschwindigkeiten des ausfliessenden Wassers wie die Quadratwurzeln der Höhen §. 420., folglich wie 2 : 1. Ferner betrachte man, daß aus einem Gefäse in einer dopelten Zeit mit dopelter Geschwindigkeit viermal soviel Wasser ausfliessen müsse, als aus einem andern von gleicher Oefnung in einer einfachen Zeit mit einfacher Geschwindigkeit. Da nun in diesen Gefäsen in dem ersten die Menge Wasser vierfach, und die Geschwindigkeit dopelt so gros ist, als in dem andern, so mus auch die Zeit, welche zur Ausleerung des ersten nöthig ist, dopelt so gros als bei dem andern sein, und sich

also ebenfals wie 2 : 1 d. i. wie die Geschwindigkeiten und folglich wie die Quadratwurzeln der Höhen verhalten.

Zusaz.

§. 430. Sind in zweien ausfliessenden Gefäsen sowohl die Grundflächen als die Höhen und Oefnungen ungleich, so stehen die Zeiten, in welchen sie sich ausleeren, in einer zusammengesezten Verhältnis aus den geraden Verhältnissen ihrer Grundflächen, geraden der Quadratwurzeln ihrer Höhen, und umgekehrten ihrer Oefnungen.

Lehrsaz.

§. 431. Die Mengen Wassers, welche in gleichen aufeinander folgenden Zeiten durch die Oefnung eines prismatischen Gefäses auslaufen, stehen in einer abnehmenden Progression wie die ungerade Zahlen 7. 5. 3. 1.

Fig. 142. Beweis: Bildet euch ein, als ob die Höhe des Gefäses AE in lauter kleine aber gleiche Teile eingeteilet, und in den Stellen B, C, D, E, welche soviel dieser Teile, als die Quadrate der natürlichen Zahlen Einheiten, d. i. z. B. 4. 9. 16 enthalten, durch Flächen durchschnitten wären; so werden die Geschwindigkeiten, da sie wie die Quadratwurzeln der Höhen sind, §. 420. wenn das Wasser nach und nach von E bis D, C, B kömmt, erstlich in E wie $\sqrt{AE} = \sqrt{16} = 4$, in D wie $\sqrt{AD} = \sqrt{9} = 3$, in C wie $\sqrt{AC} = \sqrt{4} = 2$, und in B wie $\sqrt{AB} = \sqrt{1} = 1$, sein, d. i. wie die natürlichen Zahlen in umgekehrter Ordnung abnehmen; da sich nun die Zeiten des Ausflusses ebenfals wie die Quadratwurzeln aus diesen Höhen verhalten §. 429., so wird das Wasser in der ersten Zeit von E bis D,

in der zwoten von D bis C, in der dritten von C bis B, und in der vierten von B bis A ausfliessen. Die Mengen des in diesen gleichen und aufeinander folgenden Zeiten ausfliessenden Wassers aber verhalten sich wegen ihren gleichen Grundflächen wie ihre Höhen ED, DC, CB, BA, oder vielmehr wie die Unterschiede AE — AD = 16 — 9 = 7; AD — AC = 9 — 4 = 5, AC — AB = 4 — 1 = 3; AB — 0 = 1 — 0 = 1. D. i. wie 7. 5. 3. 1, oder sie sind in einer wie die natürlichen Zahlen in umgekehrter Ordnung abnehmenden Progression.

Zusaz.

§. 432. Wenn zween Körper anfänglich mit gleicher Geschwindigkeit bewegt werden, und die Bewegung des einen allezeit gleichförmig, die des andern aber wie die ungerade Zahlen 7, 5, 3, 1 abnimt, so wird der erste einen dopelt so grossen Raum als der andere in gleicher Zeit durchlaufen §. 44.; da man nun die aus zweien Gefäsen in gleichen Zeiten ausfliessende Mengen Wassers als die durchlofenen Räume ansehen kan, so wird aus einem Gefäse, welches stäts vol erhalten wird, und also die Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers stäts gleich verbleibet, eine dopelte Menge Wasser in eben der Zeit ausfliessen, als sich ein anderes, das keinen Zufluß hat, und folglich die Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers stäts abnimt, übrigens aber von gleicher Höhe, Grundfläche und Oefnung ist, ausleeret.

Zusaz.

§. 433. Weis man demnach in wie viel Zeit ein Gefäß sich durch eine Oefnung ausleeret, so kan man auch die Menge des Wassers berechnen, welches in

einer jeden andern Zeit aus diesem Gefäse fliesset. Z. B. es wäre bekant, daß ein prismatisches Gefäß sich in 12 Stunden ganz ausleere, und man wüßte aus dem vorigen, daß die Mengen des enthaltenen Wassers, wie die Höhen, diese aber sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten; so teilet die Höhe des Gefäses in 12 × 12 = 144 gleiche Teile ein, wovon ihr dieienige, welche von unten aufwärts auf die ungerade Zahlen treffen, besonders bemerket, und deren Summe ebenfals 144 ausmachet. Da nun das Wasser in gleichen Zeiten nach den ungeraden Zahlen in umgekehrter Ordnung abnimmt, so wird in der ersten Stunde $\frac{23}{144}$, in der zwoten $\frac{21}{144}$, in der dritten $\frac{19}{144}$, in der vierten $\frac{17}{144}$, u. s. w. und in der zwölften Stunde $\frac{1}{144}$ des ganzen in dem Gefäse enthaltenen Wasser ausfliessen.

Dies ist der Grund, worauf die Einrichtung der vor alters gewöhnlichen sogenanten Wasseruhren (Clepshydra) beruheten, oder eingerichtet waren.

Übrigens lehret die Erfahrung, daß die Geschwindigkeiten und also auch die Mengen des ausfliessenden Wassers in der Folge allezeit etwas minder angetroffen werden, als sie vermög den angeführten Gesetzen sein solten. Die Ursach davon aber ist hauptsächlich die Reibung des Wassers an den Wänden der Gefäsen, und an dem Rande der Oefnung, und der Zusammenhang der Wasserteilchen, wodurch besonders gegen das Ende des Ausflusses, oder wenn die Höhe des Gefäses in Ansehung der Oefnung nicht beträchtlich ist, in dem noch in Gefäse befindlichen Wasser eine Höhlung wie ein Trichter entstehet, weil die Wasserteilchen wegen ihren Zusammenhang nicht so geschwind folgen können. Endlich sind auch die Ge-

setze

sehe nur in so lang richtig, als die Oefnung noch beträchtlich kleiner als der Boden des Gefäßes ist; denn wenn dieselbe eben so groß als der Boden wäre; so würde die ganze in demselben enthaltene Menge Wasser nicht nach und nach, sondern auf einmal auslaufen, wie die Masse eines festen Körpers mit einander fallet.

Erklärung.

§. 434. Wenn das Wasser in einer langen obenher ganz offenen Höhlung oder Rinne dahin laufet, so wird solche nach Umständen der Kanal, der Rinnsaal, oder das Flußbett genent; wird es aber in geschlossenen Röhren fortgeführet, so heist man dieses eine Wasserleitung.

Lehrsaz.

§. 435. Wenn das Wasser in geschlossenen Röhren, oder in offenen Kanälen von einem Orte nach einem andern blos durch seine Schwere fliessen sol, so mus der Ort, wo es herfliesset, höher, oder weiter vom Mittelpunkt der Erde liegen, als der Ort wo es hinfliesset.

Beweis: Betrachtet, daß das Wasser sich durch seine Schwere dem Mittelpunkt der Erde stäts zu nähern, und also dahin zu fliessen suche, wenn es durch nichts verhindert wird; nun aber kan es sich demselben nicht nähern, wenn nicht das eine Ende der Röhre oder des Kanals höher als das andere lieget; also wenn das Wasser von einem Orte nach einen andern blos durch seine Schwere fliessen sol, so mus der erstere höher oder weiter von dem Mittelpunkt der Erde liegen als der andere.

Zu-

Zusaz.

§. 436. Wenn demnach eine gerade Röhre oder ein Kanal mit einem Ende höher als mit dem andern lieget, und das Wasser durch denselben fliesset, so läßt sich dabei dasienige auf eine ähnliche Weise anwenden, was §. 246. von der Bewegung der Körper über schiefe Flächen angeführet worden.

Zusaz.

§. 437. Damit das Wasser durch eine Röhre oder Kanal durch seine eigene Schwere fliesse, ist eben nicht unumgänglich erforderlich, daß sie durchaus gerade, und in allen Stellen auf eine gleichförmige Art abhängig seie, sondern sie kan auf verschiedene Weise rechts oder links, oder auf und abwärts gebogen sein, wie
Fig. 143. ABCDE, genug wenn nur kein Ort höher als der Anfang A ist; denn gienge die Röhre etwann bis in F, und FG wäre grösser als AI, so würde das Wasser nur bis L oder soweit kommen, bis LM = AI wäre, §. 331. und wenn es weiter solte, von L nach F steigen müssen, welches wider die Natur der Schwere ist.

Wenn demnach eine Wasserleitung durch Röhren oder ein Kanal zu machen ist, so hat man vor allem den Weg, den man damit nehmen will, durch nivelliren zu erforschen, ob kein zwischen Ort höher, als der Anfangsort seie; und dabei ist noch Sorgen zu tragen, daß man die Leitung so gerade mache, als die Umstände erlauben, erstlich weil die gerade Linie die kürzeste ist, und also die Leitung oder der Kanal eine mindere Länge haben darf; zweiten, weil das Wasser sich in den Krümmungen mehr reibet, und dadurch an sei-

seiner Geschwindigkeit verlieret, und drittens weil die Teile der Röhren welche wie BC zwar niederer als A, aber dennoch aufwärts steigen, einen grössern Druck von Wasser auszustehen haben als die andern, folglich der Gefahr zu bersten mehr ausgesetzt werden.

Erklärung.

§. 438. Wenn ein Kanal, oder der Rinnsal eines Flusses durchaus gerade fortgehet, und eine prismatische Gestalt hat, so ist er regelmässig; im Gegentheil aber unregelmässig.

Der Augenschein lehrt, daß die natürlichen Rinnsäle der Flüsse sehr unregelmässig sind, und daß man nur wenige antrift, welche durch die Kunst mehr oder weniger regelmässig gemacht sind; da aber die Unregelmässigkeit derselben die Bewegung des Wassers so vielfältig verändern kan, daß sie sich nicht füglich in gewisse Gesetze bringen lasset, so sind auch die meisten Gesetze, welche hier in der Folge von dem Laufe des Wassers in Flüssen und Kanälen angeführet werden, gröstenteils auch nur auf regelmässige Kanäle anwendbar.

Erklärung.

§. 439. Man pflegt denjenigen einen beständigen Fluß zu nennen, dessen Wasser stäts gleich fortlauft, und in einen nehmlichen Orte allezeit in gleicher Höhe bleibt, so wie der ein unbeständiger Fluß heißt, bei welchem sich zu Zeiten das Gegenteil ereignet.

Zusatz.

§. 440. So lang also der Zufluß von Wasser gleich ist, oder dasselbe auf keine Art vermehret oder vermindert

mindert wird, so lang ist auch der Fluß beständig; sein Rinnsal mag übrigens regelmässig oder unregelmässig sein.

Die Erfahrung zeiget, daß die natürlichen Flüsse, da ihr Zufluß durch Regen und Schnee oft vermehrt, und durch die Ausdünstung und Versiegung vermindert wird, wenigstens nicht lange beständig sein können.

Erklärung.

§. 441. Wenn der Rinnsal eines Flusses oder Kanals durch eine Fläche perpendikular auf die Grundfläche, und auf die Richtungslinie der Bewegung des Wassers durchschnitten wird, so wird der Teil der Fläche, welcher das Wasser durchschneidet, die Durchschnitsfläche des Flusses genent.

Lehrsaz.

§. 442. Durch ieden Durchschnit eines regelmässigen oder unregelmässigen aber beständigen Flusses oder Kanal laufet in gleichen Zeiten eine gleiche Menge Wasser.

Beweis: Da bei regelmässigen Rinnsälen alle Durchschnitte gleich sind, so ist für sich klar, daß durch dieselbe in gleichen Zeiten eine gleiche Menge Wasser durchlaufe, nimt man aber an, daß zween Durchschnitte eines unregelmässigen Rinnsals von ungleicher Grösse sind, so würde das Wasser zwischen denselben niederer werden müssen, wenn durch den obern kleinern in der nehmlichen Zeit nicht eben soviel Wasser durchlaufen könte, als durch den untern grössern; und umgekehrt wenn der obere grösser wäre, und mehr Wasser durch ihn als durch den untern kleinern in der nehmlichen Zeit

lau-

laufen könte, so würde dasselbe zwischen ihnen höher werden müssen. Geschähe aber dieses, so wäre der Fluß nicht mehr beständig; also mus durch ieden Durchschnit eines beständigen Flusses in gleichen Zeiten eine gleiche Menge Wasser durchlaufen.

Zusaz.

§. 443. Damit also in einem Fluß durch einen kleinern Durchschnit eine eben so grosse Menge Wasser als durch einen grössern in der nehmlichen Zeit durchfliessen könne, so mus dasselbe in dem kleinern eine grössere Geschwindigkeit als in dem grössern erhalten.

Lehrsaz.

§. 444. Die unteren Teile des Wassers in einem Durchschnitte eines Flusses würden allezeit mehrer Geschwindigkeit als die oberen haben, wenn keine Reibung vorgienge.

Beweis. Bildet euch ein, daß der Rinnsal eines Flusses mit einer Fläche ABD senkrecht dergestalt durchschnitten wäre, daß der Lauf des Wassers durch diese Fläche ganz gehemmet würde, und das durch dieselbe in verschiedenen Höhen F, G, I kleine Oefnungen gemacht würden; so sind die Geschwindigkeiten des durch dieselben ausfliessenden Wassers wie die Quadratwurzeln der Höhen CF, CG, CI des darüber stehenden Wassers §. 420.; nimt man nun die Fläche ganz hinweg, damit das Wasser seinen freien Lauf bekomme, so behalten die Teilchen desselben noch eben die Geschwindigkeiten, mit welchen sie zuvor durch die Oefnungen herausdrangen, und folglich sind die unteren Teile des Wassers in einem Durchschnitte geschwinder als die oberen, wenn keine Reibung vorgienge. Fig. 144.

Die Erfahrung zeiget sehr oft, daß das untere Wasser langsamer, oder wenigstens nur eben so geschwind als das obere dahin fliesse, die Ursach dessen aber ist, weil sich dasselbe an den öfters sehr beträchtlichen Ungleichheiten des Grundes sehr stark reibet, und daher an seiner Geschwindigkeit verlieret.

Erklärung.

§. 445. Die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in einem Durchschnit wird dieienige genent, welche eben so gros ist, daß, wenn alle Teile des Wassers dieselbe hätten, eine gleiche Menge in der nehmlichen Zeit durchfliessen müste, als durchfliesset, da die Wasserteilchen verschiedene Geschwindigkeiten haben.

Aus den verschiedenen Geschwindigkeiten des Wassers in einem Durchschnit eine mittlere zu finden, hat man verschiedene Arten erdacht. Eine derselben gründet sich hauptsächlich auf die Eigenschaft der Parabol; weil nehmlich die Quadrate der halben Ordinaten derselben wie die ihnen zukommenden Abscissen sind, und die Quadrate der Geschwindigkeiten des in verschiedenen Höhen fliessenden Wassers sich zu diesen Höhen eben so verhalten, so kan man die Quadrate der Geschwindigkeiten als die halben Ordinaten, und die Höhen wie die Abscissen einer Parabol ansehen, und also zwischen zwo gegebenen halben Ordinaten, nebst ihren Abscissen eine mittlere halbe Ordinate als die mittlere Geschwindigkeit finden. Man kan von dieser Art in Hr. Wolfs Elementis Matheseos universæ; in der Mechanique general par Dedier, und in mehrern andern nachlesen; wir übergehen sie aber kürze halber, und geben

dafür

dafür folgende, welche sich auf die Erfahrung gründet, und durch ein von Hr. Pitot eigens dazu erfundenen Instrument bewerkstelliget wird, dessen Beschaffenheit folgende ist: das Instrument, womit man die Geschwindigkeit des fliessenden Wassers in verschiedenen Tiefen messet, um daraus die mittlere Geschwindigkeit zu finden, bestehet aus zwoen geraden gläsernen Röhren AB und CD, die an ihren Enden offen sind, CD. aber unten rechtwinkelicht umgebogen ist, und die Gestalt eines Trichters hat. Beide müssen in ihrem innern Durchmesser wenigsten 4 Linien weit, und etwas länger als die gröste Tiefe des Wassers sein, wenn sie daher sehr lang gemacht müsten werden, folglich der Gebrechlichkeit zu sehr unterworfen wären, so machet man die Teile, so unter das Wasser getaucht werden, von Messingblech, und küttet die gläserne Röhren oben darauf. Um beide zugleich in einerlei Tiefe senkrecht in das Wasser stellen zu können, so werden beide Röhren solchergestalt an ein langes Stückholz fest gemacht, daß die Oefnungen B und D in gleicher Höhe neben einander zu stehen kommen. Uber dieses kan die Röhre AB von B gegen A in Zolle und Linien eingeteilet werden. Fig. 145.

Aufgabe.

§. 446. Wie die Verhältnisse der Geschwindigkeiten des durch einen Durchschnit eines Flusses fliessenden Wassers in verschiedenen Tiefen mittelst dem beschriebenen Instrument zu untersuchen, und daraus sowohl die mittlere Geschwindigkeit als auch die Tiefe, in welcher sie sich befindet, zu bestimmen?

Auflösung: 1. Stellet das beschriebene Instrument an dem Orte, wo ihr den Durchschnit annehmet, auf verschiedene Tiefen, und dergestalt senkrecht in das Wasser, daß die Oefnung des Trichters D gerade gegen dem Stromme gekehret wird; so wird das Wasser in der Röhre AB nur bis an die Oberfläche IE des Flusses, hingegen in CD wegen der Kraft, mit welcher das Wasser gegen dem Trichter stosset, um so höher über IE gegen F steigen, als das Wasser in der Tiefe in welcher der Trichter befindlich, mehr Geschwindigkeit hat als in einer andern.

2. Bemerket an der Einteilung der geraden Röhre AB bei iedesmaliger Eintauchung die Tiefe derselben, und an der Röhre CD die Höhe, auf welche das Wasser über die Oberfläche des Flusses steiget; so geben diese Höhen die Verhältnisse der Geschwindigkeiten des Wassers in den bemerkten Tiefen.

3. Da ieder schwerer Körper, folglich auch das Wasser in der ersten Sekunde 15 Schuh tief fallet, §. 48., und mit der durch diesen Fal erlangten Geschwindigkeit mit einer gleichförmigen Bewegung in der nehmlichen Zeit sich noch einmal soweit folglich 30 Schuh bewegen würde, §. 44., nebst deme die Geschwindigkeiten des fallenden Wassers sich wie die Quadratwurzeln der Höhen, oder die Quadrate der Geschwindigkeiten sich wie die Höhen des Falles selbst verhalten §. 420., so läst sich, wenn man die Tiefen IB der iedesmaligen Eintauchung mit t', t'', t''', t''''; die dabei beobachtete Wasserhöhen EF mit h', h'', h''', h''''; die Geschwindigkeiten des Wassers mit x', x'', x''', x'''' benennet, die Geschwindigkeit des Wassers für iede Tiefe finden, wenn man setzet:

$\sqrt{15}$

$\sqrt{15} : 30 = \sqrt{h'} : x' = \sqrt{h''} : x'' = \sqrt{h'''} : x''' = \sqrt{h''''} : x''''.$

oder welches einerlei:

$15 : 900 = h' : x'^2 = h'' : x''^2 = h''' : x'''^2 = h'''' : x''''^2,$

und denn ist:

$$\sqrt{\frac{900 \times h'}{15}} = x'; \quad \sqrt{\frac{900 \times h''}{15}} = x'',$$

$$\sqrt{\frac{900 \times h'''}{15}} = x'''; \quad \sqrt{\frac{900 \times h''''}{15}} = x''''.$$

4. Um aus diesen Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen eine mittlere Geschwindigkeit m zu finden, so addiret sie zusammen, und dividiret sie mit der Anzahl derselben, so ist $\frac{x' + x'' + x''' + x''''}{4} = m.$

5. Um endlich noch die Tiefe y, in welcher diese mittlere Geschwindigkeit sich befindet, zu erhalten, so betrachtet, daß die Quadrate der Geschwindigkeiten sich wie die Tiefen verhalten; derowegen nehmet das Quadrat einer beliebigen zuvor erhaltenen Geschwindigkeit nebst ihrer Tiefe, denn auch das Quadrat der gefundenen mittlern Geschwindigkeit, und setzet:

$$x''^2 : m^2 = t'' : y, \text{ so wird } \frac{t'' m^2}{x''^2} = y$$

die Tiefe andeuten, in welcher die mittlere Geschwindigkeit des Wassers sich befindet.

Vermög dem angeführten folgete zwar, daß die Geschwindigkeit des fliessenden Wassers in gleichen Tiefen wie z. B. CG und NO fig. 144. sowohl in der Mitte als näher gegen den Ufer einerlei seie; allein die Erfahrung lehret, daß das Was-

ser sich an den meistens sehr rauhen und unebenen Ufern sehr stark reibe, und mit demselben überhaupt mehr als die Wasserteilchen unter sich selbst zusammenhange. Daher findet man die Geschwindigkeit des fliessenden Wassers in einem Durchschnit in gleichen Tiefen oft sehr verschieden, und es komt auch hier oftmals darauf an, die Beobachtungen an verschiedenen Stellen zu machen, und daraus alsdenn das Mittel zu nehmen.

Zusaz.

§. 447. Wenn man also die Weite, auf welche das Wasser mit der mittlern Geschwindigkeit in einer gewissen Zeit z. B. in einer Sekunde fliesset, bekant hat, so erhält man die Menge Wasser, welche durch den angenommenen Durchschnit in eben der Zeit durchfliesset, wenn man den Flächeninhalt des Durchschnits mit dieser Weite multipliciret.

Zusaz.

§. 448. Wenn demnach die Flächeninhalte der Durchschnitte zweener Flüssen einander gleich, und die mittleren Geschwindigkeiten des Wassers ebenfals gleich sind, so fliesset in gleichen Zeiten durch dieselben eine gleiche Menge Wasser.

Sind aber die Flächeninhalte der Durchschnitte ungleich, und die mittleren Geschwindigkeiten gleich, so verhalten sich die in gleichen Zeiten durchfliessenden Mengen Wassers wie die Flächeninhalte.

Wären die Flächeninhalte der Durchschnitte gleich, und die mittleren Geschwindigkeiten ungleich, so sind die in gleichen Zeiten durchfliessenden Mengen Wasser wie die mittlern Geschwindigkeiten.

Wenn

Wenn endlich beide ungleich sind, so stehen die in gleichen Zeiten durchfliessenden Mengen Wasser in einer zusammengesetzten Verhältnis der Durchschnittsflächen, und mittlern Geschwindigkeiten.

Zusatz.

§. 449. Da durch einen ieden Durchschnit eines regelmässigen oder unregelmässigen aber beständigen Flusses in gleichen Zeiten eine gleiche Menge Wasser fliesset, §. 442., wenn auch die Durchschnitte ungleich sind; so stehen die mittleren Geschwindigkeiten des Wassers in zween solchen Durchschnitten in verkehrter Verhältnis der Flächeninhalte derselben.

Lehrsatz.

§. 450. Das Wasser fliesset in einem durchaus regelmässigrn Rinnsal, dessen Grundfläche wie eine schiefliegende gerade Fläche abhanget, mit vermehrter Geschwindigkeit.

Beweis: Da das Wasser ein schwerer Körper ist, und diese, wenn sie über eine schiefe Fläche laufen, ihre Geschwindigkeit vermehren, §. 60. so mus dieses auch beim Wasser geschehen, welches über die schiefliegende Grundfläche seines Rinnsals dahin fliesset.

Zusatz.

§. 451. Weil also die Teilchen des in einem abhangenden Rinnsal fliessenden Wassers um so geschwinder übereinander hinweg fliessen, als sie sich schon weiter von dem Anfangsorte A ihres Laufes entfernt haben, so mus die Wassertiefe AB beim Anfang am grösten sein; aber immer abnehmen, wie FG, und DE, wie sich das Wasser von A mehr entfernt; so das die Fig. 146.

Die Erfahrung zeiget sehr oft, daß das untere Wasser langsamer, oder wenigstens nur eben so geschwind als das obere dahin fliesse, die Ursach dessen aber ist, weil sich dasselbe an den öfters sehr beträchtlichen Ungleichheiten des Grundes sehr stark reibet, und daher an seiner Geschwindigkeit verlieret.

Erklärung.

§. 445. Die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in einem Durchschnit wird dieienige genent, welche eben so gros ist, daß, wenn alle Teile des Wassers dieselbe hätten, eine gleiche Menge in der nehmlichen Zeit durchfliessen müste, als durchfliesset, da die Wasserteilchen verschiedene Geschwindigkeiten haben.

Aus den verschiedenen Geschwindigkeiten des Wassers in einem Durchschnit eine mittlere zu finden, hat man verschiedene Arten erdacht. Eine derselben gründet sich hauptsächlich auf die Eigenschaft der Parabol; weil nehmlich die Quadrate der halben Ordinaten derselben wie die ihnen zukommenden Abscissen sind, und die Quadrate der Geschwindigkeiten des in verschiedenen Höhen fliessenden Wassers sich zu diesen Höhen eben so verhalten, so kan man die Quadrate der Geschwindigkeiten als die halben Ordinaten, und die Höhen wie die Abscissen einer Parabol ansehen, und also zwischen zwo gegebenen halben Ordinaten, nebst ihren Abscissen eine mittlere halbe Ordinate als die mittlere Geschwindigkeit finden. Man kan von dieser Art in Hr. Wolfs Elementis Matheseos universæ; in der Mechanique general par Dedier, und in mehrern andern nachlesen; wir übergehen sie aber kürze halber, und geben

dafür

dafür folgende, welche sich auf die Erfahrung gründet, und durch ein von Hr. Pitot eigens dazu erfundenen Instrument bewerkstelliget wird, dessen Beschaffenheit folgende ist: daß Instrument, womit man die Geschwindigkeit des fliessenden Wassers in verschiedenen Tiefen messet, um daraus die mittlere Geschwindigkeit zu finden, bestehet aus zwoen geraden gläsernen Röhren AB und CD, die an ihren Enden offen sind, CD. aber unten rechtwinkelicht umgebogen ist, und die Gestalt eines Trichters hat. Beide müssen in ihrem innern Durchmesser wenigsten 4 Linien weit, und etwas länger als die gröste Tiefe des Wassers sein, wenn sie daher sehr lang gemacht müsten werden, folglich der Gebrechlichkeit zu sehr unterworfen wären, so machet man die Teile, so unter das Wasser getaucht werden, von Messingblech, und küttet die gläserne Röhren oben darauf. Um beide zugleich in einerlei Tiefe senkrecht in das Wasser stellen zu können, so werden beide Röhren solchergestalt an ein langes Stückholz fest gemacht, daß die Oefnungen B und D in gleicher Höhe neben einander zu stehen kommen. Uber dieses kan die Röhre AB von B gegen A in Zolle und Linien eingeteilet werden. Fig. 145.

Aufgabe.

§. 446. Wie die Verhältnisse der Geschwindigkeiten des durch einen Durchschnit eines Flusses fliessenden Wassers in verschiedenen Tiefen mittelst dem beschriebenen Instrument zu untersuchen, und daraus sowohl die mittlere Geschwindigkeit als auch die Tiefe, in welcher sie sich befindet, zu bestimmen?

Auflösung: 1. Stellet das beschriebene Instrument an dem Orte, wo ihr den Durchschnit annehmet, auf verschiedene Tiefen, und dergestalt senkrecht in das Wasser, daß die Oefnung des Trichters D gerade gegen dem Stromme gekehret wird; so wird das Wasser in der Röhre AB nur bis an die Oberfläche IE des Flusses, hingegen in CD wegen der Kraft, mit welcher das Wasser gegen dem Trichter stosset, um so höher über IE gegen F steigen, als das Wasser in der Tiefe in welcher der Trichter befindlich, mehr Geschwindigkeit hat als in einer andern.

2. Bemerket an der Einteilung der geraden Röhre AB bei iedesmaliger Eintauchung die Tiefe derselben, und an der Röhre CD die Höhe, auf welche das Wasser über die Oberfläche des Flusses steiget; so geben diese Höhen die Verhältnisse der Geschwindigkeiten des Wassers in den bemerkten Tiefen.

3. Da ieder schwerer Körper, folglich auch das Wasser in der ersten Sekunde 15 Schuh tief fallet, §. 48., und mit der durch diesen Fal erlangten Geschwindigkeit mit einer gleichförmigen Bewegung in der nehmlichen Zeit sich noch einmal soweit folglich 30 Schuh bewegen würde, §. 44., nebst deme die Geschwindigkeiten des fallenden Wassers sich wie die Quadratwurzeln der Höhen, oder die Quadrate der Geschwindigkeiten sich wie die Höhen des Falles selbst verhalten §. 420., so läst sich, wenn man die Tiefen IB der iedesmaligen Eintauchung mit t', t'', t''', t''''; die dabei beobachtete Wasserhöhen EF mit h', h'', h''', h''''; die Geschwindigkeiten des Wassers mit x', x'', x''', x'''' benennet, die Geschwindigkeit des Wassers für iede Tiefe finden, wenn man setzet:

$\sqrt{15} : 30 = \sqrt{h'} : x' = \sqrt{h''} : x'' = \sqrt{h'''} : x''' = \sqrt{h''''} : x''''$.

oder welches einerlei:

$15 : 900 = h' : x'^2 = h'' : x''^2 = h''' : x'''^2 = h'''' : x''''^2$,

und denn ist:

$$\sqrt{\frac{900 \times h'}{15}} = x'; \quad \sqrt{\frac{900 \times h''}{15}} = x'',$$

$$\sqrt{\frac{900 \times h'''}{15}} = x'''; \quad \sqrt{\frac{900 \times h''''}{15}} = x''''.$$

4. Um aus diesen Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen eine mittlere Geschwindigkeit m zu finden, so addiret sie zusammen, und dividiret sie mit der Anzahl derselben, so ist $\frac{x' + x'' + x''' + x''''}{4} = m$.

5. Um endlich noch die Tiefe y, in welcher diese mittlere Geschwindigkeit sich befindet, zu erhalten, so betrachtet, daß die Quadrate der Geschwindigkeiten sich wie die Tiefen verhalten; derowegen nehmet das Quadrat einer beliebigen zuvor erhaltenen Geschwindigkeit nebst ihrer Tiefe, denn auch das Quadrat der gefundenen mittlern Geschwindigkeit, und setzet:

$$x''^2 : m^2 = t'' : y, \text{ so wird } \frac{t'' m^2}{x''^2} = y$$

die Tiefe andeuten, in welcher die mittlere Geschwindigkeit des Wassers sich befindet.

Vermög dem angeführten folgete zwar, daß die Geschwindigkeit des fliessenden Wassers in gleichen Tiefen wie z. B. CG und NO fig. 144. sowohl in der Mitte als näher gegen den Ufer einerlei seie; allein die Erfahrung lehret, daß das Was-

ser sich an den meistens sehr rauhen und unebenen Ufern sehr stark reibe, und mit demselben überhaupt mehr als die Wasserteilchen unter sich selbst zusammenhange. Daher findet man die Geschwindigkeit des fliessenden Wassers in einem Durchschnit in gleichen Tiefen oft sehr verschieden, und es komt auch hier oftmals darauf an, die Beobachtungen an verschiedenen Stellen zu machen, und daraus alsdenn das Mittel zu nehmen.

Zusaz.

§. 447. Wenn man also die Weite, auf welche das Wasser mit der mittlern Geschwindigkeit in einer gewissen Zeit z. B. in einer Sekunde fliesset, bekant hat, so erhält man die Menge Wasser, welche durch den angenommenen Durchschnit in eben der Zeit durchfliesset, wenn man den Flächeninhalt des Durchschnits mit dieser Weite multipliciret.

Zusaz.

§. 448. Wenn demnach die Flächeninhalte der Durchschnitte zweener Flüssen einander gleich, und die mittleren Geschwindigkeiten des Wassers ebenfals gleich sind, so fliesset in gleichen Zeiten durch dieselben eine gleiche Menge Wasser.

Sind aber die Flächeninhalte der Durchschnitte ungleich, und die mittleren Geschwindigkeiten gleich, so verhalten sich die in gleichen Zeiten durchfliessenden Mengen Wassers wie die Flächeninhalte.

Wären die Flächeninhalte der Durchschnitte gleich, und die mittleren Geschwindigkeiten ungleich, so sind die in gleichen Zeiten durchfliessenden Mengen Wasser wie die mittlern Geschwindigkeiten.

Wenn

Wenn endlich beide ungleich sind, so stehen die in gleichen Zeiten durchfliessenden Mengen Wasser in einer zusammengesetzten Verhältnis der Durchschnittsflächen, und mittlern Geschwindigkeiten.

Zusaz.

§. 449. Da durch einen ieden Durchschnit eines regelmässigen oder unregelmässigen aber beständigen Flusses in gleichen Zeiten eine gleiche Menge Wasser fliesset, §. 442., wenn auch die Durchschnitte ungleich sind; so stehen die mittleren Geschwindigkeiten des Wassers in zween solchen Durchschnitten in verkehrter Verhältnis der Flächeninhalte derselben.

Lehrsaz.

§. 450. Das Wasser fliesset in einem durchaus regelmässigrn Rinnsal, dessen Grundfläche wie eine schiefliegende gerade Fläche abhanget, mit vermehrter Geschwindigkeit.

Beweis: Da das Wasser ein schwerer Körper ist, und diese, wenn sie über eine schiefe Fläche laufen, ihre Geschwindigkeit vermehren, §. 60. so mus dieses auch beim Wasser geschehen, welches über die schiefliegende Grundfläche seines Rinnsals dahin fliesset.

Zusaz.

§. 451. Weil also die Teilchen des in einem abhangenden Rinnsal fliessenden Wassers um so geschwinder übereinander hinweg fliessen, als sie sich schon weiter von dem Anfangsorte A ihres Laufes entfernt haben, Fig. 146.
so mus die Wassertiefe AB beim Anfang am grösten sein; aber immer abnehmen, wie FG, und DE, wie sich das Wasser von A mehr entfernt; so das die

Oberfläche AD des Wassers mit der Grundfläche. BE des Rinnsals nicht parallel sein kan.

Zusaz.

§. 452. Wenn man annimt, als ob das Wasser aus einem stäts gleichhoch angefülten Behälter bei AB in den abhangenden Rinnsal ABED flösse, so hat erstlich iedes Wasserteilchen an der Oberfläche bei A eigentlich noch keine Geschwindigkeit; ist es aber einmal von A bis D geflossen, so ist die Geschwindigkeit an der Oberfläche in D wie $\sqrt{CD}$ §. 420., zweiten hätte ein iedes Wasserteilchen am Grunde bei B ebenfals noch keine Geschwindigkeit, so würde dasselbe wenn es nach E gekommen, wegen der Höhe HE seines Falles seine Geschwindigkeit daselbst wie $\sqrt{HE}$ sein; da aber die Wasserteilchen in B schon eine Geschwindigkeit $= \sqrt{AB}$ haben, §. 420. die aber währenden Laufe nicht vermehret wird, so ist die Geschwindigkeit dieser Wasserteilchen, wenn sie in E gekommen, wie $\sqrt{HE} + \sqrt{AB} = \sqrt{CE}$. D. i. die Geschwindigkeiten des Wassers an der Oberfläche sind wie die Quadratwurzeln aus der Höhe ihres Fals von Anfang ihres Laufes bis zu dem Orte des Durchschnitts, und die Geschwindigkeiten des Wassers in was immer für einem Punkt unter der Oberfläche verhalten sich wie die Quadratwurzeln des Falles von der Oberfläche A bis zu dem besagten Punkt. Doch wird hier ebenfals vorausgesezt, daß keine Reibung des Wassers staat habe.

Zusaz.

§. 453. Aendert sich die abhangende Grundfläche BE eines Kanals nach der Hand in eine horizontale wie EM, so wird zwar das Wasser in demselben noch eine Strecke mit der durch den Fal über die abhangende

Grundfläche erlangten Geschwindigkeit fortfliessen, dieselbe wird sich aber nicht allein nicht weiter vermehren, sondern nach und nach wieder abnehmen, und endlich keine andere Geschwindigkeit mehr haben, als welche blos von dem Drucke der obern Wasserteilchen gegen die untern entstehet. Daher komt es hauptsächlich, daß das Wasser in natürlichen und unregelmässigen Rinnsälen an einigen Orten langsamer, und an andern wieder geschwinder fliesset.

Lehrsaz.

§. 454. Wenn ein Fluß anlauft, oder sich vermehret, so verhält sich die in einer gewissen Zeit durch einen Durchschnit fliessende Menge Wasser zu der Menge, welche in eben der Zeit an eben dem Orte vor dem Anlaufen durchgeflossen ist, wie das Produkt aus dem Flächeninhalt des Durchschnittes und mittlern Geschwindigkeit des angeloffenen Flusses zum Produkt aus dem Flächeninhalt und mittlern Geschwindigkeit vor dem Anlaufen.

Beweis: Wenn ein Fluß anlauft, so wird sowohl seine Durchschnittsfläche, als auch seine mittlere Geschwindigkeit grösser als sie zuvor war, und man kan die in beiden verschiedenen Zuständen des Flusses genommene Durchschnitte und mittlere Geschwindigkeiten als von zweenerlei Flüssen ansehen; die in zween Flüssen durch angenommene Durchschnitte in gleichen Zeiten fliessenden Mengen Wasser aber sind in einer zusammengesetzten Verhältnis ihrer Durchschnittsflächen und mittlern Geschwindigkeiten, §. 448. also ist auch erwiesen, was oben ausgesprochen worden.

Da hier der Hauptabsicht gemäß von dem Lauf des Wassers in Kanälen und Flüssen nur die er-

sten Gründe angeführt werden können, so müssen sich diejenige, welche davon mehrer zu wissen verlangen, in Werken, welche eigens von dieser Materie, folglich ausführlicher handeln, Raths erhohlen.

Zweites Hauptstück.

Von der Bewegung des Wassers durch den Druck der Luft.

Erklärung.

Fig. 147. §. 455. Ein Gefäß welches wie CD unten und oben mit einer Oefnung versehen, die kleiner als der mittlere Körper desselben ist, wird insgemein ein einfacher oder Stichheber (Diabetes) genent.

Erklärung.

§. 456. Wenn ein hohler Cylinder wie EF unten eine kleinere Oefnung als seine Grundfläche hat, und mit einen wohlpassenden Kolben, der sich aber doch auf und nieder ziehen läst, versehen wird, so pflegt man ihn eine Saugsprize (Syrinx) zu nennen.

Erfahrung.

§. 457. Wenn eine an beiden Enden offene Röhre AB, oder ein Stichheber CD, oder eine Saugsprize EF mit einen Ende B, D, oder F in ein Wasser gesteckt wird, und an dem andern Ende A oder C die Luft durch Anlegung des Mundes, bei E aber durch Anziehung des Kolbens ausgesaugt, oder verdünnet

wird,

wird, so steiget das Wasser in der Röhre AB, in dem Stichheber CD, oder in der Saugsprize EF mehr oder weniger in die Höhe, nachdem die Luft mehr oder weniger ausgesaugt oder verdünnet worden, und verbleibt so lang in dieser Höhe stehen, als die Luft sich in diesen Zustand erhält.

Die Ursach hievon ist, weil die Luftsäule des Dunstkreises gegen die Oefnung A, C, oder E an welcher gesauget wird, zu drücken verhindert wird, hingegen iene Luftsäule, welche auf die Wasserfläche und folglich auch gegen die Oefnung B, D und F ungehindert würket, und das Wasser durch ihren Druck mehr oder weniger in die Höhe treibet, nachdem die Luft auf der einen Seite durch das Saugen verdünet wird.

Zusaz.

§. 458. Wenn man die Röhre AB oder den Stichheber CD, an beiden Enden offen ganz in das Wasser tauchet, hierauf das obere Ende A oder C mit dem Finger zuhält, und so wieder aus dem Wasser ziehet, so bleibt das Wasser eben so in der Röhre und in dem Heber hangen, als ob die Luft ausgesauget worden wäre, weil die Luft durch die Eintretung des Wassers anfänglich würklich ausgetrieben wird, und die Luftsäule des Dunstkreises alsdenn nur gegen das unere Ende drücken kan.

Doch wird das Wasser sich in Röhren oder Saugsprizen, die unten gar zu weit sind, nicht so leicht hangend erhalten, sondern wieder zurück fallen; weil die Luft sich zwischen dem Wasser und den innern Wänden leichter hinein schleichet, folglich obenher dicker wird, und also dem Druck der Luftsäule des Dunstkreises gegen die untere Oefnung

nung mehr widerstehet. Daher pflegt man die untere Oefnung der Stichheber und Saugsprizen gemeiniglich unten kleiner als den Durchmesser ihres mittleren Körpers, welcher sonst nach Belieben gestaltet sein kan, zu machen.

Zusaz.

§. 459. Weil eine Luftsäule des Dunstkreises einer Wassersäule von gleicher Grundfläche und 32 Schuhhöhe das Gleichgewicht zu halten vermag, §. 386., und das Wasser in der Röhre AB, oder in dem Stichheber CD, oder in einer Sprize EF nach Aussaugung oder Verdünnung der Luft nur durch den Druck der Luftsäule des Dunstkreises gegen das untere Ende in die Höhe getrieben wird, so kan das Wasser in besagten Gefäsen durch blosses Saugen oder Verdünnen der Luft niemals höher als auf 32 Schuh gebracht werden.

Fig. 147.

Erklärung.

§. 460. Eine an beiden Seiten offene, und etwann wie ABC gebogene Röhre wird insgemein ein Winkelheber genent. Doch kan auch diese Röhre auf verschiedene andere Art z. B. wie MN gebogen, oder auch ungleichweit sein, und dennoch als ein Heber gebraucht werden.

Fig. 148.

Erfahrung.

§. 461. Wenn man einen Winkelheber ABC mit einen Ende C in ein Wassergefäß stellet, das andere A aber dergestalt richtet, daß es mit der Wasserfläche DO in gleicher Höhe ist, und an demselben mit dem Mund die Luft aussauget, so steiget das Wasser des Gefäses in den Heber bis in B, und fallet von da bis in A; weil die Luftsäule des Dunstkreises stärker gegen

die

die Wasserfläche DO drücket, als die ausgesogene oder verdünte Luft in den Heber entgegen würken kan. Ziehet man nun den Mund von A ab, so bleibt das Wasser in dem ganzen Heber gleichsam hangen, und fält weder zur einen noch andern Oefnung A oder C heraus; weil die Luftsäulen des Dunstkreises auf beide Oefnungen gleichstark drucken, und dem in beiden Aermen befindlichen Wasser, dessen Höhe in ieden = BH ist, das Gleichgewicht hält.

Wäre aber das eine Ende des Hebers in F, und folglich höher als die Wasserfläche DO, so wird, nachdem die Luft bei F ausgesaugt worden, das Wasser zwar die Röhre CBF anfänglich ganz erfüllen, aber sobald man den Mund von F hinweg ziehet, so gleich wieder in das Gefäß zurückfallen; weil das in dem Arme BF enthaltene Wassrr, dessen Höhe = BE ist, der Luftsäule des Dunstkreises, welche gegen F drücket, keinen so grossen Widerstand leisten kan, als das in dem Arme BC befindliche, dessen Höhe = BH ist, der auf die Wasserfläche DO, und also gegen die Oefnung C drückenden Luftsäule machet; derowegen mus das Wasser nothwendig dahin getrieben werden, wo es den wenigsten Widerstand antrift.

Ist endlich das Ende A niederer als die Wasserfläche IL des Gefäses, so wird das Wasser nach ausgesaugter Luft ebenfals in beide Aerme eindringen, aber nachdem man die Oefnung A wieder frei machet, so lauft das Wasser so lang durch dieselbe bis die Wasserfläche IL sich so weit in dem Gefäß erniedriget hat, daß sie bis in DO gekommen, und mit A gleiche Höhe erhält. Die Ursach dessen ist, weil die Luftsäule, welche gegen die Wasserfläche IL drücket, den Widerstand des in BL enthaltenen Wassers, dessen Höhe =

BE ist, leichter als die Luftsäule, welche gegen A drücket, den Widerstand des in AB befindlichen Wassers, dessen Höhe = BH ist, überwinden kan. Daher nothwendig das Wasser gegen die Seite auslauft, wo es den wenigsten Widerstand findet.

Zusaz.

§. 462. Wenn also die Oefnung A um EH niederer als die Oberfläche IL des Wassers im Gefäß ist, so wird das Wasser nach ausgesaugter Luft bei A mit einer Geschwindigkeit auslaufen, welche es bekäme, wenn es von E bis H frei gefallen wäre; denn dem übrigen Teil, wovon die Höhe BE ist, wird durch dem Druck der Luftsäule das Gleichgewicht gehalten. So wie aber die Wasserfläche währenden Auslaufen immer niederer wird, so wird EH und folglich auch die Geschwindigkeit kleiner, wenn das Gefäß keinen andern Zufluß hat.

Zusaz.

§. 463. Da eine Luftsäule des Dunstkreises einer Wassersäule von gleichem Durchmesser und 32 Schuhhöhe eben das Gleichgewicht halten kan §. 386., so darf die Höhe EB, nehmlich von der Wasserfläche bis zum höchsten Punkt des Hebers auch nicht grösser als 32 Schuh sein; weil die Luftsäule, welche auf die Wasserfläche drückt das Wasser im widrigen Falle nicht bis dahin treiben könte, so stark man auch bei A saugen möchte.

Erfahrung.

§. 464. Wenn man eine hohle gläserne, oder von
Fig. 149. anderer Materie gemachte Kugel A oder B, welche mit einem engen Röhrchen, daß bei E und F eine kleine

Oef-

Oefnung hat, versehen ist, anfangs auf ein gelindes Kohlenfeuer legt, damit sie sich wohl erwärme; hierauf das Röhrchen mit der Oefnung in ein Wasser stecket, so dringt das Wasser sogleich in die Kugel hinein, und füllet sie mehr oder weniger, nachdem sie nehmlich erwärmet worden. Die Ursach dessen aber ist, weil die Luft in der Kugel durch die Wärme viel dünner als die äussere gemacht wird, §. 369. so drückt die Luftsäule des Dunstkreises stärker auf das in dem Gefäß befindliche Wasser als die in der Kugel verdünte Luft widerstehen kan, und folglich wird das Wasser so lang in die Kugel getrieben, bis die in derselben noch befindliche Luft in einen so engen Raum zusammengedrückt, und so dicht wird, daß sie dem Druck der äussern Luftsäule das Gleichgewicht halten kan.

Dieses giebt Mittel an die Hand, ein mit einer sehr engen Oefnung versehenes Gefäß auf eine leichte Art mit Wasser oder einer andern flüssigen Materie anzufüllen; welches sonst schwer oder gar nicht von statten gehet.

Zusatz.

§. 465. Stellet man die Kugeln A und B welche nach dem vorigen §. gefüllet worden, dergestalt auf ein gelindes Kohlenfeuer, oder an einen andern warmen Ort, daß die innere Oefnung des Röhrchens durch das Wasser bedeckt wird, so fängt es sogleich an durch die Oefnungen E und F auszulaufen, und stellet einen Springbrunn vor. Die Ursach dessen ist ebenfals in dem Druck der Luft zu suchen; denn da die in der Kugel zurückgebliebene Luft durch die Wärme stärker ausgedehnet wird, als die Luftsäule des Dunstkreises gegen die Oefnung E oder F drücken kan, so drücket

sie

sie auf die Fläche des in der Kugel befindlichen Wassers, und treibet solches durch die Oefnung aus.

Wie nach beiden vorigen §§. die Ausdehnung der Luft in der Kugel und die daher rührende Bewegung des Wassers durch die Wärme zu wege gebracht wird, eben so läst dieses sich auch durch die Verdünnung oder Verdickung der Luft mittelst der Luftpumpe bewürken. Es ist demnach an sich einerlei, durch was der Zustand der Luft in der Kugel geändert wird. Wir könten hier von der Bewegung des Wassers durch den Druck der Luft noch ein und anderes anführen, wenn wir nicht die Weitläufigkeit vermeiden müsten. Wir begnügen uns also damit allein, daß wir den Anfängern nur den Grund gezeiget haben, nach welchen das Wasser durch den Druck der Luft sowohl durch die Kunst, als auch nicht selten von der Natur bewegt wird.

Drittes Hauptstück.

Von dem Stose des Wassers gegen ihm entgegengesezte Flächen.

Erklärung.

§. 466. Durch den Stoß des Wassers wird iene Kraft verstanden, mit welcher es an eine ihm entgegen gesetzte Fläche anlauft.

Zusaz.

§. 467. Der Stoß eines festen Körpers gegen einen andern mus von dem Stose des Wassers wohl unter-

terschieden werden; denn wie der erstere wegen dem festen Zusammenhang seiner Teilchen gleich bei der ersten Berührung ganz und auf einmal erfolget, so kan der andere, da die Wasserteilchen nicht so fest zusammenhangen, nur so wie sie aufeinander folgen, und die Anstoßfläche berühren, nach und nach geschehen.

Zusatz.

§. 468. Da es also bei der Kraft des Stoses des Wassers zugleich auf die Menge der anstossenden Wasserteilchen, und auf die Gewalt, mit welcher sie stossen, ankomt, so mus dieselbe sowohl von der Grösse der Anstoßfläche, und Dichtigkeit oder eigenthümlichen Schwere des Wassers selbst, als von der Geschwindigkeit und Richtung abhangen.

Lehrsatz.

§. 469. Die Kraft des Stoses des Wassers, welcher senkrecht wider eine ruhende Fläche geschihet, ist gleich dem Gewichte eines Volumen Wassers, daß die gestossene Fläche zur Grundfläche, die Höhe des darüberstehenden Wassers aber zur Höhe hat.

Beweis: Der Druck, den die horizontale Grundfläche CD eines gleichweiten Gefäses AD von dem darinn enthaltenen Wasser auszustehen hat, ist der ganzen Schwere dieses Wassers d. i. der Schwere eines Volumens Wasser, welches eben diese Grundfläche und die Höhe AB des darüberstehenden Wassers zur Höhe hat, gleich §. 336. Stellet man sich nun vor, als ob diese Grundfläche nur ein wenig von dem Gefäse getrennet würde, ohne daß das Wasser dadurch noch einen merklichen Zuwachs an der Geschwindigkeit bekäme, so würde der Druck des Wassers gegen die Grundfläche eben anfangen sich in einen Stoß zu ver- Fig. 150.

wandeln, und da anfangs noch kein merklicher Zuwachs an der Geschwindigkeit geschehen ist, so wird auch seine Kraft noch dem Gewichte eines Volumens Wasser gleich sein, dessen Grundfläche die gestossene Fläche, und die Höhe jene des darüberstehenden Wassers ist.

Lehrsatz.

§. 470. Die Kraft des Stoses des Wassers, der senkrecht gegen eine ruhende Fläche geschihet, ist gleich dem Gewichte der Menge Wasser, welche sich in einem Momente durch die Oefnung der Anstosfläche ergiesset, multiplicirt durch die Geschwindigkeit; oder ist gleich der Schwere eines Wasserkörpers, dessen Grundfläche die Anstosfläche, und die Höhe das Quadrat der Geschwindigkeit ist.

Beweis: Die Geschwindigkeit des Wassers an der Grundfläche CD, worauf nehmlich der Stoß geschihet, ist eben so gros als ob es von A bis B frei gefallen wäre §. 425.; daher läßt sie sich durch $\sqrt{AB}$ ausdrücken §. 420; und folglich ist die Menge Wasser, welche sich in einem Momente ergiesset, gleich dem Produkt der Grundfläche CD in die Quadratwurzel der Höhe AB §. 419; und da überhaupt die Bewegungskraft eines Körpers in dem Produkt seiner Masse in die Geschwindigkeit bestehet, so ist erstlich $CD \times \sqrt{AB}$ die Menge oder Masse des in dem Momente ausfliessenden Wassers, und $CD \times \sqrt{AB} \times \sqrt{AB}$ ein Wasserkörper, dessen Gewicht die Kraft des Stoses ausdrückt.

Zusatz.

§. 471. Da $\sqrt{AB} \times \sqrt{AB} = AB$, so ist auch $CD \times AB$ ein Wasserkörper dessen Gewicht die Kraft des Stoses ausdrückt; wodurch also das, was §. 469. erwiesen worden, ebenfals bestättiget wird.

Zu-

Zusatz.

§. 472. Das, was bisher von der Bestimmung der Kraft des Stoses des Wassers gegen eine ruhende Fläche gesagt worden, ist nur von einem solchen Stose zu verstehen, der dem Druck des Wassers gegen die Oefnung des Ausflusses selbst gleich ist; oder in so ferne das Wasser sonst noch keine andere Geschwindigkeit hat, als die der Quadratwurzel der Höhe AB gleich ist. Entfernet man aber die Fläche CD, welche die Oefnung B geschlossen hat, beträchtlich abwärts, so daß das Wasser dadurch schon einen beträchtlichen Zuwachs an seiner Geschwindigkeit erhält, so würde man die Kraft des Stoses zu gros berechnen, wenn man sie nach dem vorigen §. dem Gewichte der Wassersäulen AD gleich machte. Denn obwohl zwar in diesem Falle die Geschwindigkeit in der Quadratwurzel von AD bestehet, so gehet doch in der nehmlichen Zeit nicht mehr Wasser durch die Oefnung B heraus, als in dem Falle da die Anstoßfläche nahe bei B gehalten wird. Wenn also die Menge Wasser, so in einen Momente durch die Oefnung B fliesset, $= B \times \sqrt{AB}$ ist §. 470., so ist die Kraft des Stoses gegen CD in gegenwärtigen Falle $= B \times \sqrt{AB} \times \sqrt{AD}$, oder vielmehr dem Gewichte dieses Wasserkörpers. Fig. 151.

Zusatz.

§. 473. Eben so würde man an einem Wasserbehälter MN, der den Ausfluß BD an der Seite und von einer beträchtlichern Höhe hat, zur Ermessung der Kraft des Stoses des ausfliessenden Wassers die Oefnungsfläche BD nicht durch die ganze Höhe AD, sondern durch eine mittlere Proportional $\frac{AD + AB}{2} =$ Fig. 152.

 AC

AC multipliciren müssen, um den Wasserkörper zu bekommen, dessen Gewicht der Kraft des Stoses gleich ist.

Zusaz.

Fig. 153. §. 474. Liefe das Wasser über eine schiefliegende Fläche AB, so läßt sich die Geschwindigkeit desselben allemale durch die Quadratwurzel der Höhe des Abfalles d. i. durch $\sqrt{AC}$ ausdrücken §. 62.; folglich ist das Quadrat derselben $=$ AC, und also die Kraft des Stoses gegen die ruhende Fläche m der Schwere eines Wasserkörpers $m \times AC$ gleich.

Zusaz.

§. 475. Wäre die gleichförmige Geschwindigkeit c eines Strommes aus einer Beobachtung bekant, und man solte die Höhe AC des Abfalles desselben finden, um die Kraft des Stoses gegen eine gerad entgegengesetzte Fläche m zu bestimmen, so betrachtet, daß ieder Körper in einer Sekunde 15 Schuh tief falle, und durch diesen Falle eine Geschwindigkeit erlange, mit welcher er in gleichförmiger Bewegung in eben der Zeit 30 Schuh durchlaufen würde §. 44., desgleichen daß die Geschwindigkeiten des Wassers sich wie die Quadratwurzeln der Höhen des Abfalles verhalten §. 420.; daher kan man sezen: $30 : \sqrt{15} = c : \sqrt{AC}$, oder $900 : 15 = cc : AC$, folglich $\frac{15cc}{900} = AC$, und nach gemachter Reduktion $\frac{cc}{60} = AC$; daraus ist zu ersehen, daß man das Quadrat der Geschwindigkeit des Strommes nur durch 60 dividiren müsse, um den Quotienten für die Höhe des Abfalles zu erhalten; und das man den Flächeninhalt m durch AC multipli-

ciren

ciren müsse, um die Schwere dieses Wasserkörpers für die Kraft des Stoses zu bekommen, erhellet aus §. 474.

Man siehet wohl, daß man aus der bekanten Höhe des Abfalles und der Anstoßfläche, oder aus der gegebenen Kraft des Stoses die Geschwindigkeit auf eben diese Art finden könne.

Zusatz.

§. 476. Flösse das Wasser eines Behälters T, vermög einem eröfneten Schutzbret BG unten durch eine Oefnung BD deren Flächeninhalt = m seie; und von da noch weiter über die schiefliegende Rinne DF, und man verlangte die Kraft des Stoses gegen die ruhende Fläche FL, die wir ebenfals = m annehmen wollen, zu wissen; so betrachtet erstlich, daß man zwischen den Höhen AB und AD die mittlere proportional AC nehmen müsse, um diejenige Höhe zu erhalten, durch deren Quadratwurzel die Geschwindigkeit des Wassers am Ergiessungsorte vorgestellet wird §. 473., und daß man die Geschwindigkeit, welche das Wasser in seinem fernern schiefen Falle von D nach F durch $\sqrt{DE}$ ausdrücken könne §. 62.; daher wird die Masse des in einer gewissen Zeit durch die Oefnung BD auslaufenden Wassers $= m \times \sqrt{AC}$ sein, §. 470.; und stäts gleich verbleiben, der schiefe Rinnsal DF mag übrigens wie immer beschaffen sein, und die Kraft des Stoses gegen die ruhende Fläche FL = m wird folglich dem Gewichte eines Wasserkörpers gleich sein, dessen Inhalt $= m \times \sqrt{AC} \times \sqrt{DE}$ ist. Fig. 154.

Zusatz.

§. 477. Wäre aber die Anstoßfläche m nicht in der Ruhe, wie wir bisher vorausgesetzt haben, sondern sie

hätte ebenfals wie z. B. die Schaufel eines Wasserrades eine Bewegung und zwar nach der Richtung des anstossenden Wassers, und folglich eine gewisse Geschwindigkeit a, so ist klar, daß, wenn sie der Geschwindigkeit c des Strommes gleich ist, die Anstoßfläche in solchem Falle keinen Stoß vom Wasser empfangen könne; wenn aber die Geschwindigkeit der Anstoßfläche kleiner als die des Strommes ist, daß sie alsdenn nur eine Geschwindigkeit c — a, d. i. eine, die dem Unterschied von beiden Geschwindigkeiten gleich ist, erhalten werde. Da wir nun zuvor §. 475. gewiesen haben, daß man das Quadrat der Geschwindigkeit des Strommes durch 60 dividiren müsse, um die Höhe des Abfalles x zu finden, so ist also in diesem Falle $\frac{\overline{c-a}^2}{60} = x$; und folglich $m \times \frac{\overline{c-a}^2}{60}$ ein Wasserkörper, dessen Schwere die Kraft des Stoses ausdrückt, die die mit der Geschwindigkeit a schon versehene Fläche m durch das Wasser erhaltet, dessen Geschwindigkeit schon bekant wäre.

Gienge aber die Anstoßfläche m dem Stromme mit einer gewissen Geschwindigkeit entgegen, so würde $m \times \frac{\overline{c+a}^2}{60} =$ die Kraft des Stoses sein.

Übrigens siehet man leicht, wie man zu verfahren hätte, wenn aus der gegebenen Höhe des Abfalles, die Geschwindigkeit des Rades, und die Kraft des Stoses zu suchen wäre. u. m. d. g.

Ebenfals läßt sich daraus erkennen, daß, wenn die Geschwindigkeit eines Wasserrades so gros als die des Strommes selbst sein solte, dasselbe alsdenn der Machine die es treiben, oder deren Last

über-

überwinden sol, keinen Nachdruck geben könte. Dieienigen betrügen sich also sehr, welche glauben, daß ie geschwinder sie das Wasserrad einer Maschine umlaufen lassen, um so grössere Würkung sie sich auch versprechen könten. Man wird aus dem folgenden ersehen, wie gros die Geschwindigkeit des Wasserrades einer Machine in Absehung der des Strommes sein kan, damit es die größtmöglichste Kraft erhalte.

Lehrsaz.

§. 478. Wenn ein Wasserrad einer Machine zugleich die gröste Geschwindigkeit, und den grösten Nachdruck geben sol, so darf es nicht mehr als $\frac{1}{3}$ der ungebundenen Geschwindigkeit des Strommes erhalten, und die gemässigte Geschwindigkeit des Strommes mus nur $\frac{2}{3}$ der ungebundenen sein.

Beweis: Betrachtet, daß, wenn die ungebundene Geschwindigkeit des Strommes $= C$ ist, und das Wasserrad sich mit einer gewissen Geschwindigkeit x nach demselben bewegt, der Stromm alsdenn nur mit dem Unterschied dieser Geschwindigkeiten d. i. $C - x$ in das Rad würken könne §. 477., und folglich eine gemässigte Geschwindigkeit erhalten müsse, wäre nun $x = C$, so würde $C - x = 0$ sein, folglich könte in diesem Falle das Rad und die Machine keine Würkung erhalten; wäre aber $x = 0$, oder das Rad in der Ruhe, so würde zwar $C - x = C$ sein, und folglich das Rad die ganze Macht des Strommes empfangen, weil aber das Rad in diesem Falle ohne Geschwindigkeit angenommen wird, so kan es keine Würkung auf die Machine machen. Daraus ist also zu erkennen, daß die Würkung auf die Machine zugleich sowohl von dem Quadrate der gemässigten Geschwindigkeit des Strommes,

mes, als von der Geschwindigkeit des Rades, und folglich der Machine abhange, derowegen allezeit $= \overline{C-x}^2 \times x$ seie, und so wie das eine von beiden anwachset, daß andere immer abnehmen müsse. Es komt also lediglich darauf an, diese zwo Grössen so zu wählen, oder einzurichten, daß ihr Produkt, welches die Würkung der Machine vorstellen kan, das gröstmöglichste
Fig. 155. werde. Um nun dieses zu erhalten, so seie ABED ein Rechtangel, worin AB die ungebundene Geschwindigkeit C des Strommes, mit welcher er auf das ruhende Radschaufel, DE = AB aber die Geschwindigkeit x des Rades in jenem Falle vorstellet, wenn dieselbe der Geschwindigkeit des Strommes selbst gleich wäre; teilet man ferner dieses Rectangel in eine beliebige Anzahl z. B. in 6 gleiche Elemente durch die Linien FI, GM, HR u. s. w. und ziehet die Diagonal BD, so wird jede derselben dergestalt in zween Teile FL und LI, GO und OM, u. s. w. geteilet, daß, so wie die einen in arithmetischer Progression abnehmen, die anderen anwachsen. Eben derowegen können wir die Quadrate von AB, FL, GO, HN u. s. w. als die Quadrate der gemässigten Geschwindigkeiten C—x, B (welches = 0 ist), LI, OM, NR u. s. w. als die Geschwindigkeiten x des Rades oder der Machine in soviel verschiedenen Fällen ansehen; und setzen wir, daß die ungebundene Geschwindigkeit des Strommes = AB = 6 seie, so wird FL = 5, GO = 4, HN = 3, u. s. w. die gemässigten Geschwindigkeiten, B = 0, LI = 1, OM = 2, NR = 3 u. s. w. die Geschwindigkeiten x des Rades in verschiedenen Fällen vorstellen; die Produkte aus den Quadraten der erstern in die andere werden folgende sein, und die Grösse der Würkungen in die Machine vorstellen, wie folget:

$\overline{AB}^2$

$\overline{AB}^2 \times B = 36 \times 0 = 0.$
$\overline{FL}^2 \times LI = 25 \times 1 = 25.$
$\overline{GO}^2 \times OM = 16 \times 2 = 32.$ gröste Würkung.
$\overline{HN}^2 \times NR = 9 \times 3 = 27.$
$\ldots\ldots\ldots = 4 \times 4 = 16.$
$\ldots\ldots\ldots = 1 \times 5 = 5.$
$\ldots\ldots\ldots = 0 \times 6 = 0.$

Daraus ist also zu erkennen, daß im ersten und lezten Falle keine Würkung erfolgen könne, wie schon oben gesagt worden, und daß das gröste Produkt $\overline{GO}^2 \times OM$ seie. Da aber $GO = \frac{2}{3} AB$, und $OM = \frac{1}{3} AB$ ist, so ist auch erwiesen, daß die gemässigte Geschwindigkeit des Strommes nur $\frac{2}{3}$, und die Geschwindigkeit des Rades nur $\frac{1}{3}$ der ungebundenen Geschwindigkeit des Strommes haben könne, oder es mus $c - x = \frac{2c}{3}$, und $x = \frac{c}{3}$ sein, wenn die Machine die größtmöglichste Würkung machen sol.

Zusaz.

§. 479. Da man um denjenigen Wasserkörper zu erhalten, dessen Gewicht die Kraft des Stoses gegen eine mit einer gewissen Geschwindigkeit x bewegten Schaufel ausdrücket, die Fläche m der Schaufel durch $\frac{\overline{c-x}^2}{60}$ multipliciren mus §. 477., $c - x$ aber nur $\frac{2c}{3}$ sein darf, wenn die gröstmöglichste Würkung erfolgen sol, §. 478., so ist $\frac{2c}{3} \times \frac{2c}{3} = \frac{4cc}{9}$ und $\frac{4cc}{9 \times 60} \times m =$ dem Wasserkörper, dessen Gewicht die Kraft des Stoses ausdrückt, mit welcher die Ma-

chine die gröstmöglichste Würkung machen kan. Daraus ist also zu ersehen, daß man nur auf $\frac{4}{9}$ derienigen Kraft, mit welcher die ungebundene Geschwindigkeit eines Strommes gegen eine ruhende Fläche würket, Rechnung machen könne, wenn nehmlich die Würkung der Machine die gröstmöglichste sein solle; d. i. wenn sie zugleich die gröstmöglichste Geschwindigkeit, und den grösten Nachdruck empfangen sol.

Wil man an einer vorkommenden Machine, die durch ein Wasserrad getrieben wird, untersuchen, ob sie nach der gröstmöglichsten Würkung eingerichtet seie, so hat man nur die Geschwindigkeit, oder die Höhe des Abfalles des Wassers, und die Geschwindigkeit des Rades zu untersuchen, und zu sehen, ob die leztere $\frac{1}{3}$ von der erstern seie, fände man sie grösser, so empfangt die Machine nicht den gröstmöglichsten Nachdruck vom Wasser, und würde sie kleiner gefunden, so gehet die Machine langsamer als sie gehen könte. Im ersten Falle könte man ihr mehr Last zu überwinden geben, im andern aber ist ihr zuviel aufgelegt worden.

Lehrsaz.

§. 480. Die Kraft des senkrechten Stoses des Wassers verhält sich zu der des schiefen Stoses gegen eine unbewegliche Fläche, wie das Quadrat des Sinus totus zum Quadrat des Sinus des Einfalwinkels, den die Richtung des Wassers mit der Anstoßfläche machet.

Fig. 156. Beweis: Wenn GH parallel zu IL die Seitenwände eines Kanals, AC die ungebundene Geschwindigkeit des darinfliessenden Wassers, BD und EF die

Grund-

Grundlinien m und n aber die Inhalte zwoer vertikalen Flächen vorstellen, wovon die erste senkrecht, die andere aber schief auf AC stehet; und man ferner AO parallel zu EF, und AE senkrecht darauf, desgleichen OC parallel zu AE ziehet, so siehet man erstlich: daß das Wasser gegen die senkrechte Fläche BD mit ihrer ganzen und ungebundenen Geschwindigkeit AC würken könne; zweiten da die ungebundene Geschwindigkeit AC durch das Parallelogram AOCE in zwo zusammengesezte Geschwindigkeiten AO und AE zerteilet wird, und die eine AO, indem sie parallel zu EF ist, in die Fläche EF gar nicht würken kan, daß nur die Geschwindigkeit AE übrig bleibe, mit welcher das Wasser seinen Nachdruck gegen die schiefe Fläche ausüben kan. Daher ist die Masse des Wassers, welche in einer gewissen Zeit gegen die senkrechte Fläche BD stosset, gleich dem Flächeninhalt m derselben multiplicirt durch AC, und weil auf die schiefe Fläche EF in einen Augenblick nicht mehrere Wasserteilchen als auf die Fläche BD stossen, so ist die Masse des Wassers, welche in eben der Zeit gegen die schiefe Fläche stossen, gleich dem Flächeninhalt m multiplicirt durch AE. Nun aber ist die Kraft des Stoses gleich dem Produkt aus der Masse in die Geschwindigkeit, also ist die Kraft des Stoses gegen die senkrechte Fläche $= m \times \overline{AC}^2$, und die gegen die schiefe Fläche $= m \times \overline{AE}^2$ folglich die erste zur andern wie $\overline{AC}^2 : \overline{AE}^2$. Wenn man nun den Winkel ACE als den Einfalwinkel betrachtet, so stellet AC den Sinus totus, und AE den Sinus des Einfalwinkels vor, und also ist auch erwiesen, daß die Kraft des senkrechten Stoses des Wassers sich zu der des schiefen: wie das Quadrat des Sinus totus zum Quadrat des Sinus des Einfalwinkels verhalte.

Zusaz.

§. 481. Ziehet man DH parallel zu EF, so werden die Dreiecke ACE und DHB einander ähnlich,

also ist AC : AE = DH : DB,

und $\overline{AC}^2 : \overline{AE}^2 = \overline{DH}^2 : \overline{DB}^2$,

und da DH = EF ist,

so ist auch $\overline{AC}^2 : \overline{AE}^2 = \overline{EF}^2 : \overline{DB}^2$,

folglich verhält sich auch die Kraft des senkrechten Stoses zu der des schiefen wie das Quadrat der Grundlinie der schiefen Fläche, zum Quadrat der Grundlinie der senkrechten.

Zusaz.

§. 482. Um also die Kraft eines schiefen Stoses gegen eine ruhende Anstoßfläche zu finden, hat man erstlich die Kraft des senkrechten nach §. 476. zu suchen, und den Einfalwinkel zu messen, dann aber zu sezen: wie das Quadrat des Sinus totus zum Quadrat des Sinus des Einfalwinkels also verhält sich die Kraft des senkrechten Stoses zu der des schiefen, oder nach §. 481. zu verfahren.

Zusaz.

§. 483. Eben so würde man sich in der Berechnung der Kraft eines schiefen Stoses zu verhalten haben, wenn die Anstoßfläche anstaat zu den Seitenwänden GH und IL schief zu stehen, sich zu dem Horizont neigete.

Wäre das Wasser in der Ruhe, und die Anstoßfläche würde gegen dasselbe bewegt, so hätte man sich in der Berechnung der Kraft des Stoses oder des Widerstandes, den in solchen Falle das Wasser gegen die Fläche machen würde, auf die oben angezeigte Art zu benehmen.

An-

Anmerkungen von Wasserrädern.

§. 484. 1. Wenn man sich zur Bewegung der Machinen des Wassers bedienet, so hat man vor allen durch genaues Nivelliren zu untersuchen, wie hoch sein Gefäl ist, oder wie hoch man es durch Dämme oder Wehren schwellen kan ohne die anliegende Gegend zu überschwemmen, oder in andere Ungelegenheiten zu verfallen. Zugleich hat man zu beobachten, ob das Wasser in gehöriger Menge vorhanden, d. i. ob der Zufluß mit dem Abfluß proportioniret seie; denn wäre der Abfluß grösser als der Zufluß, so würde das Wasser nicht stäts eine gleiche Höhe erhalten, und folglich die Kraft des Stoses gegen die Radschaufel vermindert werden; wäre aber der zweite grösser als der erste, so würde zwar die Machine stäts ihren gleichen Trieb haben, aber der Wasserbehälter oder der Schleusse würde überlaufen, und Uberschwemmungen verursachen. Da es sich nun sehr oft ereignet, daß man Machinen an Flüsse bauet, deren ganze Menge Wasser man nicht nöthig hat, so hat man allezeit die Anstalt zu treffen, daß das überflüssige Wasser durch einen eigenen Uberfal ungehindert ablaufen, oder durch eine angebrachte Schleusse nach Verlangen gemässiget werden könne.

2. Die Wasserräder, deren man sich gewöhnlich bedienet Machinen zu treiben, werden in Ansehung der Art wie das Wasser auf dieselbe fält in zwo Hauptgattungen nehmlich in die Ober und Unterschlächtige abgeteilet. Oberschlächtige werden überhaupt alle diejenige genent, auf welche das Wasser ganz von oben wie bei A; oder wenigsten gegen die Seite ungefähr in der gleichen Höhe des Mittelpunkts des Welbaumes wie bei B in einer Rinne herabfält, und sich noch einige Zeit zwischen den Schaufeln mit fort bewegt, folglich Fig. 157. u. 158.

lich nicht allein durch den Stoße, sondern auch zum Teil noch mit seiner Schwere in das Rad würket. Ferner unterscheidet man die oberschlächtigen Räder noch in
Fig. 157. geradlaufende wie bei A, und in gestürzte wie bei B zu sehen. Man siehet leicht von selbsten, daß die ober-
Fig. 158. schlächtigen Wasserräder ein hohes Gefäl erfordern. Unterschlächtige Wasserräder sind jene, an welchen
Fig. 159. der Stoß oder Aufschlag des Wassers an die untersten Schaufeln angebracht wird, wie bei C zu sehen.

Die Wasserräder werden auch nach ihrer Bauart
Fig. 161. noch unterschieden, und zwar erstlich in Straubräder wie XY, die nur aus einen Kranz bestehen, auf dessen äussern Umkreis die Schaufeln nach der Richtung der Radien eingesetzt werden, und sind die einfachsten
Fig. 157. und leichtesten; in Kropf oder Bottichräder: deren Schaufeln schief auf dem Umkreis stehen, und eigentlich aus zwo Flächen ab und bc zusammengesetzt, und auf allen Seiten ausser auf der aussern geschlossen sind, sie werden so gemacht, damit das Wasser länger in den Schaufeln verbleiben, und durch seine Schwere mitwürken sol; sind folglich nur als Oberschlächtige zu ge-
Fig. 160. brauchen; in Stäberräder IR, welche zween Kränze in einer gewissen Entfernung nebeneinander haben, zwischen welchen die geraden Schaufeln eingelassen werden. Diese Art ist grösser und schwerer als die vorhergehenden, braucht mehr Aufschlagwasser, und kan daher auch mehr Kraft ausüben; in Pansterräder, die den Stäberrädern fast ähnlich, nur daß ihre Kränze noch weiter von einander abstehen, folglich längere Schaufeln haben, mehrer Aufschlagwasser brauchen, und derowegen noch mehr Kraft ausüben können; daher werden sie auch nur zu grössern Machinen angewendet. Die Umstände müssen bestimmen, welcher Art von Wasserrädern man sich in besondern Fällen zu bedienen hat.

Ob-

Obwohl es einigen scheinet, daß man in gewissen Fällen, nehmlich wenn man zwar ein hohes Gefäl aber wenig Wasser hat, die oberschlächtigen Räder mit mehrern Vorteil als die unterschlächtigen anwenden könne, so läßt sich doch das Gegenteil sehr leicht behaupten; denn wenn man den Wasserbehälter so einrichtet, daß das Wasser anstatt oben auf das Rad zu fallen, unten gegen die unterste Schaufel ausfliessen muß, so gewinnet man Augenscheinlich einen grössern Fal, das Wasser erhält mehr Geschwindigkeit, und übet also einen grössern Stoß aus, als wenn es oben auf das Rad gefallen wäre; da man nun aus dieser Ursach würklich weniger Aufschlagwasser als im andern Falle brauchet, so darf man die Oefnung des untern Ausflusses nur kleiner machen, oder die Schleuse nicht so hoch ziehen, um mit dem Wasser auszulangen. Man übergehet mit Stilschweigen, daß beiden oberschlächtigen Rädern viel mehr Wasser umsonst verspritzt wird.

3. Damit man einem Wasserrade die vorteilhafteste Anzahl Schaufeln gebe, so hat man sie soweit auseinander zu setzen, daß, wenn die Schaufel AB, Fig. 159. welche eben senkrecht auf die Richtung des Wassers stehet, ihren senkrechten Stand zu verlassen anfängt, die nächstfolgende DI eben damals mit ihrem äussersten Ende das Wasser berühre; nach welchen Grund also der Winkel, den die Schaufeln im Mittelpunkt der Welle mit einander machen, leicht durch die Trigonometrie zu bestimmen, und die Anzahl derselben zu finden sein wird, wenn sowohl der Radius des Rades als die Höhe der Schaufel vorher bekant, oder angenommen ist. Mehrere Schaufeln anzubringen, wäre nicht allein überflüssig sondern auch nachteilig.

4. Die

4. Die Schaufelfläche solle allezeit um etwas höher als die Durchschnitsfläche des darauffallenden Wassers sein, damit weniger Wasser darneben verloren gehe.

5. Den unterschlächtigen und gestürzten Rädern hat man zwischen ihren Schaufeln, den Seitenwänden und dem Boden des Gerinnes so wenig Spielraum zu lassen, als möglich; damit dadurch das wenigste Wasser ohne Würkung verloren gehe.

6. Dasienige Wasser, was bereits gegen die Schaufeln gestossen hat, muß unter dem Rad mit grösserer Geschwindigkeit hinweg fliessen können, als das Rad selbst hat.

7. Die Geschwindigkeit des Wassers, so ein gewöhnliches Rad umtreiben mus, sol zum wenigsten in 1 Sekunde 3 Schuh betragen.

8. Die Wasserräder sol man allezeit so nahe an die Schleusse oder an das Schutzbret stellen, als thunlich ist; damit es den Stoß gleich beiden Ausschluß empfange.

9. In der Berechnung des Verhältnis der an dem Wasserrad angebrachten Kraft zu derienigen Last, welche durch die Machine bewegt werden sol, hat man den Radius des Rades allezeit von dem Mittelpunkt der Welle bis in dem Mittelpunkt der Schaufelfläche zu nehmen.

Fig. 158. 10. Wenn man sich eines gestürtzten Rades bedienet, so würket das Wasser durch seine Schwere mit einem grössern Nachdruck, wenn man den Boden des Gerinnes nach dem äussern Umkreis des Rades von F an bis zum untersten Punkt C krümmet, weil es sich dadurch länger in den Schaufeln aufhalten mus.

Vier-

Viertes Hauptstück.

Von einigen Wassermachinen überhaupt.

Erklärung.

§. 481. Das Wort Wassermachine kan eigentlich in zweenerlei Verstand genommen werden; nehmlich einmal wenn es eine Machine bedeutet, welche zwar durch das Wasser bewegt wird, aber sonst verschiedene Verrichtungen machen kan; und das anderemal wenn sie selbst Wasser beweget, oder in die Höhe treibt, aber entweder ebenfals durch das Wasser, oder durch andere Kräften z. B. von Menschen, Thieren, Wind u. m. d. g. in Bewegung gesetzt wird.

Es wird hier nur überhaupt von ienen Machinen, welche durch Wasserräder getrieben werden, Meldung geschehen, weil es der Absicht dieses Werkes zu wider, und zu weitläufig sein würde mehrere anzuführen, oder umständlicher zu erklären.

Von der Anordnung einer Machine, welche eine Last im Kreise oder um ihre Achse bewegen sol.

§. 482. Da ein Wasserrad, durch welches die Machine getrieben werden sol, ohnehin im Kreise oder um seine Achse gedrähet wird, so ist auch keine Schwierigkeit eine gleiche Bewegung der Last, oder vielmehr demienigen Teil der Machine zu verschaffen, an welchen die Last oder der Widerstand angebracht wird. Es komt dabei nur darauf an, wohl zu überlegen, was

die Last oder der Widerstand, der überwunden werden sol, für ein Verhältnis gegen die am Wasserrad vorhandenen Kraft hat; ferner welche Geschwindigkeit die Kraft besitzet, und mit welcher die Last bewegt werden solle, um die Teile der Machine darnach einrichten zu können. In dieser Absicht merke man also überhaupt folgendes:

1. Ist die Last oder der Widerstand, den die Machine zu überwinden hat, grösser als die Kraft, welche das Wasserrad beweget, so siehet man wohl, daß man durch die Anordnung der Machine an der Kraft zu gewinnen suchen mus; thut man aber dieses, so wird die Last alsdenn sich um so langsamer als die Kraft bewegen, weil man unmöglich zugleich sowohl an der Kraft als Geschwindigkeit gewinnen kan. Derowegen ordne
Fig. 160. man an dem Welbaum AB des Wasserrades IR ein Getrieb CD an, welches man in ein Zahnrad CE greifen läst, an dessen Welle FG, wenn dieses allein schon hinlänglich ist, alsdenn die Last angebracht wird. Wäre aber dieses Zahnrad noch nicht zureichend, die Kraft soviel zu vermehren, als die Last, oder der Widerstand erfodert, und die Umstände erlaubten auch nicht dasselbe grösser anzunehmen, so würde man an dessen Welle noch ein Getrieb H, welches wieder in ein anderes Zahnrad greifen müste, anbringen müssen u. s. w. Doch sind dergleichen Vermehrungen der Getrieb und Räder ohne Noth niemals zu machen, weil sie nur die Unkosten der Machine, und die Reibungen ihrer Teile vermehren. Die Grösse der Radien der Getrieben und Räder werden nach den oben von Rädermachinen gegebenen Gründen bestimt; und es verstehet sich von selbsten, daß man sich wenn die Achse der Last horizontal
Fig. 160. u. 162. wie FG ist, der Sternräder CE, und wenn sie verti-

tal oder stehend wie DF, der Kammräder HI bedienen müsse. Fig. 161.

2. Ist aber die Last oder der Widerstand geringer als die Kraft am Wasserrad, so kan man an die Welle desselben NO gleich ein Zahnrad IH oder CE anbringen, welches man in ein Getriebe D oder E einer andern Welle DF oder EP eingreifen läßt, an welche man hernach die Last oder den Widerstand anbringen kan. Fig. 161. u. 162.

3. Wäre durch die Umstände bestimt, wie oft die Last sich in einer gewissen Zeit um ihre Achse bewegen sol, so hätte man sowohl die Radien der Räder und Getrieben als die Anzahl ihrer Zähnen nach den bereits oben gegebenen Gründen einzurichten. Übrigens ist für sich klar, daß man, wenn die Last geschwinder als das Wasserrad umlaufen sol, an dessen Welle ein Zahnrad, im Gegenfalle aber ein Getrieb anzuwenden hätte.

Dergleichen Bewegungen der Last um ihre Achse werden hauptsächlich bei Mühlen, Schleifwerken und Bohrmachinen u. ä. m. erfordert; da nehmlich bei den erstern die Mühl und Schleifsteine, bei den andern aber die Bohrer, oder der Körper, so gebohret werden sol, sich selbst um seine Achse drähen mus. Übrigens ist es gar nicht schwer, an einer solchen Machine die angewendte Kraft und Last nach den oben gegebenen Gründen gehörig zu proportioniren, wenn es nur zu thun ist die Last, so man dem Gewicht nach ausdrücken kan, zu bewegen; ist aber nebst der Last auch noch ein besonderer Widerstand vorhanden, der von der Kraft überwunden werden mus, wie z. B. der Widerstand, den das Getraid dem

Mühlstein machet, oder den der Bohrer einer Bohrmachine an dem Körper findet, der gebohret werden sol, so wird es in manchen Fällen ziemlich schwer, die Grösse desselben dem Gewicht nach richtig auszudrücken, um die Kraft darnach zu proportioniren, gemeiniglich mus man in dergleichen Fällen Erfahrungen zu Hülfe nehmen.

Von der Anordnung einer Machine, welche eine Last durch eine sogenante Daumwelle bewegen sol.

§. 483. 1. Wenn eine Last öfters nach einander nur auf eine kleine Höhe gehoben werden sol, und dieselbe durch ihre eigene Schwere an ihre vorige Stelle zurückfallen kan; wie es sich z. B. an Hammerwerken und Pulverstämpfen ereignet, so bedient man sich gemeiniglich der sogenanten Daumwellen. Es ist aber dieselbe nichts anders als eine gewöhnliche Welle, an
Fig. 163. welcher so viele Daumen ABC eingesetzt werden, so oft die Last bei einer Umdrähung der Welle gehoben werden, und wieder niederfallen sol. Diese Daumen bekommen beinahe die Gestalt der gewöhnlich Zähnen eines Rades, nur daß sie, nach dem nehmlich die Last höher gehoben werden sol, auch etwas länger, und in gehöriger Stärke gemacht werden. Diese Daumen drücken bei Hammerwerken das kürzere Ende des Hammerstihles soweit nieder, bis sie von demselben abglitschen, und es verlassen müssen, eben damals aber fält der bis in F gehobene Hammer auf seinen Anboß D nieder, und verrichtet bei ieder herumdrähung der Welle so viele Streiche, als Daumen an der Welle auf einen Umkreise stehen. Bei den Hammerwerken werden die Daumen gemeiniglich unmittelbar an die Welle des Wasserrades selbst angebracht, und bei Eisen-

fengußwerken werden die grossen Blasbälcke oft auch durch Daumenwellen bewegt.

2. Wenn man die Daumwelle zu Pulverstämpfen anwendet, so wird ieder Stämpfer an der Seite mit einer sogenanten Heblatte DE versehen, die von dem eben in der horizontalen Stellung sich befindenden Daumen BC ergrifen, und soweit in die Höhe gehoben wird, bis sie, wenn sie nehmlich in F gekommen ist, von demselben wieder abglitschet, wornach der Stämpfer wieder in das Grubenloch I zurückfallet, und seinen Stoß daselbst ausübet. Damit ein Stämpfer bei ieder Herumdrähung der Welle zweimal würke, so pflegt man dem Daumen BC einen andern LN gegenüber auf dem nehmlichen Umkreis der Welle einzusetzen, oder das Stückholz NC ganz durch die Welle gehen zu lassen. Fig. 164.

Weil aber in dergleichen Stampfwerken allezeit mehrere Stämpfer in einer Reihe gestellet werden, so wird an der Welle einem ieden Stämpfer gegen über ein Umkreis gezeichnet, und die Daumen werden auf denenselben dergestalt nach einander hingesetzt, daß, wenn der erste die Heblatte des ersten Stämpfers bis in F gehoben hat, und eben bereit ist sie wieder zu verlassen, der zweite die Heblatte des zweiten Stämpfers eben damals anfange zu erheben, und so von dem dritten, vierten und allen übrigen Stämpfern. Durch diese Einrichtung kommen die Daumen längst der Welle auf ihren verschiedenen Umkreisen in einer Spirallinie zu stehen.

Es ist zwar nicht zu laugnen, daß die Kraft von Anfange der Erhebung eines Stämpfers bis er in seine höchste Höhe DF komt, ungleich würke; weil der

Hebelarm, an welchen eigentlich die Last des Stämpfers angebracht ist, anfänglich = AC, auf die lezte aber nur = AB ist. Aus dieser Ursache geben einige den Daumen an der Fläche, mit der sie die Heblatten berühren, eine krumlinigte Gestalt, wie bei O zu sehen. Allein diese Ungleichheit der Würkung wird durch die mehrere angebrachten Stämpfer, wenn einer nach dem andern gehoben wird, wieder hinlänglich ersezt.

Eine umständliche Beschreibung und Berechnung der Kraft und Last sowohl als der dabei vorfallenden Reibungen würde hier zu weitläufig sein; wer aber von solchen Pulverstämpfen eine ausführliche Nachricht verlanget, kan sie in Belidors Hydraulik finden.

Von der Bewegung einer Last durch die Kurbel oder dem krummen Zapfen.

§. 484. Wenn eine Last z. B. durch die Bewegung eines Wasserrades in gerader Linie wechselweise entweder auf und nieder, oder hin und her bewegt werden sol, so wird gemeiniglich eine Kurbel, oder ein
Fig. 165. so genanter krummer Zapfen AB an das Ende einer Welle angebracht, der durch die Herumdrähung mit derselben die angebrachte Last Q von seiner untersten Stellung AD bis zur obersten AH hinauf, und von derselben wieder bis zur ersten herab bewegt; oder die Last bei einer Herumdrähung um den dopelten Radius AB, d. i. um 2AB = DH auf und nieder bringet. Daß aber das Verhältnis der Kraft zur Last in allen Stellungen eines solchen krummen Zapfens nicht immer einerlei bleibet, folglich daß die Kraft ungleich arbeiten mus, erhellet aus folgenden: wenn man sezet, es seie AI der Radius eines durch die Kraft P nach der Richtung PI bewegten Wasserrades, an dessen Welle der krumme Zapfen AB mit der Last Q angebracht wäre

der eben sich in der horizontalen Stellung befände, mithin die Richtung BQ der Last darauf perpendikular stünde; so ist klar, daß der Abstand der Last von dem Ruhepunkt A = AB, und der Abstand der Kraft von eben diesen Punkt = AI, und folglich in solchen Falle P : Q = AB : AI seie, §. 227.
Nachdem aber der krumme Zapfen von B nach C gegangen sein wird, so ist seine Stellung AC, der Abstand der Last von dem Ruhepunkt A ist nur = AE, und der Abstand AI der Kraft bleibt wie zuvor,

also ist: P : Q = AE : AI §. 227.

Ist die Stellung des krummen Zapfens AG, so ist AT der Abstand der Last, folglich

P : Q = AT : AI,

Wenn endlich der krumme Zapfen in die Stellung AH gekommen ist, so ist der Abstand der Last von dem Ruhepunkt = o, oder unendlich klein, folglich wird die Kraft damals nichts zu arbeiten haben. So wie aber derselbe diese Stellung wieder zu verlassen anfangt, und mehr gegen L gehet, so erhält die Last eine grössere Geschwindigkeit im niedersteigen, dieselbe wird in der Stellung MA am grösten sein, und wieder abnehmen, so wie sie von M weiter nach D komt, folglich wird die Kraft, indem der krumme Zapfen in den halben Zirkel HMD gehet, nichts zu arbeiten haben; so bald er sich aber wieder von D gegen B beweget, so wird der Abstand der Last von dem Ruhepunkt wieder grösser, und zwar in der Stellung AN gleich AF, und in AO gleich AE sein, folglich wird im ersten Falle P : Q = AF : AI,

und im andern P : Q = AE : AI werden. Daraus ist also klar zu ersehen, daß die Kraft damals die gröste Arbeit hat, wenn der krumme Zapfen die horizontale Stellung AB einnimt, daß solche immer geringer

wird, ie weiter sich derselbe von dieser Stellung befindet, daß endlich die Kraft gar keinen Widerstand mehr leidet, so lang der krumme Zapfen sich in den halben Zirkel HMD herum bewegt.

Der krumme Zapfen wird seiner ungleichen Bewegung ungeachtet bei verschiedenen Machinen z. B. bei Sägemühlen, zur Bewegung der Säge, bei Pumpwerken zur Bewegung der Kolbenstangen und a. d. g. angewendet. Bei den leztern suchet man der ungleichen Bewegung dadurch auszuweichen, daß man mehrere Kolben nebeneinander anbringet, und den krummen Zapfen so vielfach machet, als Kolben vorhanden sind; damit aber ihre Bewegung wechselweise geschehen kan, so machet man bei dem zweifachen die zween Radien
Fig. 166. AB und CD einander entgegenstehend, oder in einer Fläche; bei dem dreifachen, daß sie untereinander glei-
Fig. 167. che Winkel BAC, CAD und DAB = 120° machen; und bei dem vierfachen daß allezeit zween wie AC und
Fig. 168. AE einander gegen überstehen, und mit den andern zween AB und AD rechte Winkel machen. Nach einiger Uberlegung siehet man leicht ein, daß die dreifachen die ungleiche Bewegung am aller meisten vermindern, derowegen sind sie auch die gebräuchlichsten. Noch eine wesentliche Ungleichheit ereignet sich bei der Bewegung eines krummen Zapfens, wenn die Last an einer steifen Stange an demselben hanget, die ziemlich kurz ist; denn alsdenn geschihet es, daß die Kraft bei ieder Umdrähung zweimal senkrecht, und zweimal schief würket, welches bei Pump und Druckwerken öfters ziemliche Ungelegenheit, und in den Stifeln eine beträchtliche Reibung verursachet.

Um die Ungleichheiten der Bewegung des krummen Zapfens zu vermeiden, hat man nebst andern folgende Mittel erdacht, nehmlich man machet die Stange, woran

an die Last befindlich ist, in der Gestalt einer Rahme ABCD, und giebt ihr innenher zu beiden Seiten Zähne, in welche ein an einer Welle befindliches Getrieb L, welches nur auf dem halben Umkreis mit Zähnen versehen ist, eingreifet; sobald nun dieses Getrieb entweder durch die Kurbel LE, oder durch ein Rad umgedrähet wird, so greifen die Zähne desselben an der Seite AB in die Zähne der Rahme, und ziehen die Stange so lange in die Höhe, bis der lezte Zahn des Getriebes in den lezten Zahn der Rahme an dieser Seite eingegrifen, und ganz oben verlassen hat. In dem nehmlichen Augenblick als dieses geschihet, ist auch der erste Zahn des Getriebes bis an dem untersten Zahne der Seite CD gekommen, damit er und die folgenden nun in die Zähne der Rahme auf dieser Seite eingreifen, und die Stange wieder niederdrücken können. u. s. w. Fig. 169.

Auf eine ähnliche Art kan man auch mit einem solchen Getriebe zwo Kolbenstangen AB und CD bewegen, die an ihren Seiten mit Zähnen versehen sind; nur müssen beide mit Gewichten E und F versehen werden, damit AB nachdem sie gehoben worden, wieder niedergedrückt, CD aber, nach dem sie niedergedrückt worden, durch das Gewicht F wieder gehoben werden könne. Wobei aber die Ungelegenheit ist, daß diese Gewichter von der Kraft stäts mit bewegt werden müssen.

Ein sehr gutes Hülfsmittel wider die Ungleichheit des krummen Zapfens sind die sogenanten elliptischen Scheiben, deren gemeiniglich drei dergestalt an eine Welle angebracht werden, daß ihre grössere Achsen AB, EC, FD die dopelten Radien eines regelmässigen Sechsecks wie wohl in verschiedenen Flächen hintereinander liegend vorstellen, auf der Länge der Welle aber soweit von einander abstehen, als die Entfernung Fig. 171.

der Kolbenstangen und die Stifel des Pumpwerkes erfordern. Uber eine iede solche elliptische Scheibe liegt das Ende R eines langen Wagebalkens RO, welches zur Verminderung der Reibung mit einer Rolle S versehen wird, die eben auf die Kante der elliptischen Scheibe auftrift. N ist der Ruhepunt des Wagebalkens, auf welchem er sich bewegen kan. An dem einen Ende O eines ieden Wagebalkens wird die Kolbenstange OM angebracht. So oft sich nun die Welle im viertel Umkreis herumdrähet, so steiget das Ende R eines ieden Wagebalkens einmal um dem Unterschied der grossen und kleinen halben Achse der elliptischen Scheibe, da ist: um IB — IL in die Höhe, indeme hingegen das andere Ende O niedersinket, und den Kolben in den Stifel drücket, so wie alsdenn die Welle das zwote Viertel des Umkreises beschreibet, so sinket das Ende R des Balkens durch seine eigene Schwere wiederum IB — IL nieder, und das andere O gehet in die Höhe; und bewegte solchergestalt den Kolben in einen halben Umtrieb der Welle einmal und in einem Ganzen zweimal auf und nieder; welches schon ein wesentlicher Vorzug gegen den krummen Zapfen ist, als der bei einer ganzen Umdrähung nur einmal würken kan.

Durch die Stellung der Scheiben in ein Sechseck, geschihet es, daß die Wagebalken sich wechselweise bewegen, damit die Arbeit der Kraft gleicher ausgeteilet wird. Uberhaupt hat diese Art Machinen, zu was sie demnach auch immer angewendet werden, den Vorteil, daß sie sehr sanft und ohne allen Zucken bewegt wird.

Fig. 172. Die 172te fig. zeiget wie die Welle nach der Länge, und die elliptischen Scheiben nach der Stiern und in ihrer Entfernung von einander anzusehen sind.

Von

Von den gebräuchlichsten Ventilen und Kolben der Wasserpumpen.

§. 485. I. Wenn das Wasser in geschlossenen Röhren in die Höhe gehoben werden sol, so ist erforderlich, daß man seine Gemeinschaft in gewissen Orten in den Röhren wechselsweise und nach Erfodernis ganz unterbrechen, und wieder herstellen kan; und dazu bedient man sich der sogenanten **Ventilen**. Unter den verschiedenen Arten derselben, die bisher erdacht worden, sind die sogenanten **Muschel** und **Klappenventil**, welche in der 173 und 174 ten Figur im Grundris und Durchschnit vorgestellet werden, die gebräuchlichsten und nützlichsten. Fig. 173. u. 174. Das **Muschelventil** bestehet aus einem Stück Messing AB, welches zwischen die Zusammenfügung zwoer Röhren angebracht wird, und in der Mitte mit einer runden und etwas konisch zulauffenden Oefnung ab versehen ist. In diese Oefnung wird eine messingene Muschel C wohl eingerieben, die untenher in der Mitte einen Stengel Cd hat, der durch den Quer über die Oefnung angebrachten Steeg ef gehet, und untenher mit einem Knöpfgen versehen ist, damit die Muschel sich im auf und niedergehen stäts in der geraden Richtung erhalte, und sich nicht weiter entferne, als nöthig ist. Die Oefnung ab macht man so gros, damit das Wasser so ungezwungen als möglich ist, durchgehen könne; in welcher Absicht man den Röhren in diesen Stellen öfters einen Bauch giebt. Diese Art von Ventilen wird gemeiniglich nur bei gerade stehenden Röhren gebraucht.

Die zwote Art oder das **Klappenventil** bestehet in folgenden: es wird nehmlich auf dem breiten und überstehenden Rande der untern Röhre A ein breiter Ring von starken Leder gelegt, dessen äusserer Durchmesser Fig. 174.

CD mit dem des Randes der Röhre gleich, der innere ef aber etwas grösser als die Oefnung der Röhre ist, und davon noch ein Stück wie abdc ausgeschnitten wird. In diesen ausgeschnittenen Teil wird ein gleiches Stück Leder abdxhc eingepasset, und unter den runden Teil dieses Leders legt man eine messingene Scheibe no, wie im Durchschnit zu sehen, deren Durchmesser etwas kleiner als der der Oefnung der Röhre ist; obenher aber eine andere mv fast von gleichem Durchmesser mit dem runden Leder, und schraubet sie mit der durch die Mitte gehenden Schraube rs fest zusammen. Wenn man nun dieses Stück Leder auf die untere Röhre genau in den ausgeschnittenen Teil des ledernen Ringes bdfeca leget, und die obere Röhre TV fest darauf schraubet, so giebt das runde Stück die Klappe ab, wobei das vorstehende Leder bei cd die Dienste eines Gewerbes verrichtet, damit sie frei auf und zu fallen kan. Die Oefnung der untern Röhre wird bei diesem Ventil wie bei dem vorigen soweit gelassen, damit das Wasser mit den wenigsten Zwange und in so grosser Menge durchgehen kan, als möglich ist; in welcher Absicht man den Röhren daselbst gerne eine Erweiterung TV giebt. Diese Art von Ventilen kan besonders sowohl bei horizontal als schiefliegenden Röhren

Fig. 175. wie bei CD zu sehen, mit Vorteil gebraucht werden.

Um das Wasser in den Röhren der Pumpwerke in Bewegung zu bringen, und entweder zu drücken, oder zu heben, so bedient mau sich der sogenanten Kolben, sie bestehen gewöhnlich aus nichts andern, als aus mehrern über einander zusammengeschraubten ledernen Ring-

Fig. 176. platten wie CD im Grund, und AB im Durchschnit sehen läst, und die alle in die Röhre, in welcher der Kolbe auf und ab spielen sol, genau passen müssen. Das Stück Röhre, worinnen der Kolbe spielet, wird der

Sti-

Stifel genent, und mus volkommen gerade, gleichweit, und der Daure wegen von Metal sein. Der Kolbe wird obenher an eine steife eiserne Stange befestiget, der man bei F öfters ein Glied giebt. Mittelst dieser Stange wird nun der Kolbe auf und nieder bewegt, daher sie auch die Kolbenstange heist.

Uberhaupt sind zwo Gattungen von Kolben die gebräuchlichsten, nehmlich der Druckkolbe wie AB, der ganz Massive ist, und der Hebkolbe wie CD, welcher in der Mitte eine Höhlung HE hat, die obenher mit einem Ventil E versehen ist, um sich nach Erfordernis schliessen und öfnen zu können. Oefters wird der Cylinder des Kolbens AB anstaat von Leder ganz von Metal gemacht, und genau in den Stiefel eingerieben. Diese metallenen Kolben haben besonders ihren Nutzen bei Feuerspritzen; weil das Leder sehr eintrocknet, wenn es nicht beständig naß erhalten wird. Fig. 176. u. 177.

Von den Heb und Druckwerken.

§. 486. Wenn die Umstände erlauben, das Wasser in der nehmlichen Röhre in welcher der Kolbe angebracht ist, senkrecht bis zu seinen Ausguß in die Höhe zu heben, wie sich dieses meistens in den gemeinen Brunnen ereignet, so bedient man sich fast gewöhnlich der sogenanten Hebpumpen; die überhaupt auf folgende Art eingerichtet sind: erstlich wird die unterste Röhre CB dergestalt in den Wasserbehälter gesetzt, daß ihre untere Oefnung stäts unter der Oberfläche AB des Wassers ist. Niemals über 32 Schuh sondern allezeit unter dieser Höhe wird ein Ventil CD zwischen dem Anschluß zwoer Röhren eingesetzt; und alle unter diesem Ventil befindliche Röhren, sie mögen demnach von Holz oder Metal sein, werden insgemein die Saugröhren genent. In die nächst über dieses Ventil zu Fig. 178.

stehen

stehen kommende Röhre CR wird ein metallener Stiefel YP eingesetzt, in welchen ein Hebkolbe G auf und nieder spielet, dessen Stange GI ganz durch alle Röhren hinausgeführet wird, um sie oben entweder durch einen gemeinen Hebel, oder krummen Zapfen u. d. g. in Bewegung zu setzen. Endlich wird oben an der Seite der obersten Röhre das Ausgußloch H in der verlangten Höhe angebracht. Wenn nun der Kolbe das erstemal von C nach P in die Höhe gezogen wird, so schliesset sich sein Ventil G; weil aber durch die Entfernung des Kolbens von dem untern Ventil zwischen ihm und demselben die Luft sehr verdünnet wird, oder gleichsam ein luftleerer Raum entstehet, so drückt die Schwere des Dunstkreises das Wasser aus den unten befindlichen Behälter durch die Saugröhren und durch das untere Ventil L in dem zwischen dem Kolben und demselben entstandenen leeren Raume. Sobald nun der Kolbe seine gröste Höhe in P erreichet hat, und anfangt wieder nieder zu sinken, so schliesset sich das Ventil L, hingegen öfnet sich das Kolbenventil G, und läst das zwischen beiden eingedrungene Wasser über den Kolben hinaufsteigen. Ist der Kolbe solchergestalt bis ans untere Ventil niedergesunken, und fängt an abermal zu steigen, so schliesset sich das Ventil G von neuen, L aber öfnet sich, und das Wasser dringet abermal durch dasselbe, und eilet dem Kolben nach, indem derselbe das bereits ober ihm befindliche in die Höhe hebet; bis endlich soviel Wasser über den Kolben gedrungen ist, daß es bei ieder Hebung desselben durch den Ausguß H ausfliessen mus.

Erlauben es die Umstände nicht, das Wasser senkrecht über den unten befindlichen Wasserbehälter in die Höhe zu treiben, oder man ist genöthiget dasselbe durch Krümmungen oder in einen ganz andern Orte, als wo die

Kolben angebracht werden können, in die Höhe zu schaffen, so gebraucht man sich des sogenanten Druckwerkes, welches zwar öfters verschiedene Einrichtungen erhält, die aber in der Hauptsache alle dahin abziehlen, daß das Wasser bei der Erhebung des Druckkolbens IK durch das untere Ventil F durch den Druck des Dunstkreises auf das in dem Wasserbehälter befindliche Wasser in dem Stiefel dem Kolben I nacheile, und denselben anfülle, bei der folgenden Niederdrückung des Kolbens aber sich das Ventil F schliesse, das Seitenventil G aber öfne, und das in dem Stiefel befindliche Wasser durch dasselbe in die Steigröhre GH dringe, und daß dieses bei ieden Druck des Kolbens wiederhollet werde. Gemeiniglich werden zween, drei oder mehrere Druckkolben und Stiefel neben einander und dergestalt angebracht, daß sie wechselweise ihre Verrichtung machen, teils um die ungleiche Arbeit der Kraft, als welche im aufziehen der Kolben viel geringer als im niederdrucken ist, gleichförmiger zu machen, teils auch um mehrer Wasser zu gewinnen. Die Steigröhren GH werden von mehrern Stiefeln oder ihren Seitenventillen G meistens in eine allein zusammengeführet, und gemeiniglich der Unkosten wegen in ihrem innern Durchmesser etwas kleiner als die Stiefel selbst gemacht, doch dörfen sie auch nicht zu enge sein, weil in solchen Falle das Wasser in denselben eine gar zu grosse Geschwindigkeit annehmen mus, und derowegen auch eine grössere Kraft zum drücken erfodert wird. Fig. 179.

Die grossen Feuerspritzen sind an sich nichts anderes als druckwerke, welche gewöhnlich aus zween Stiefeln AB und CD bestehen, im welchen die zween Kolben EF und GH durch eine grosse Hebelstange IL wechselweise bewegt werden. T und S sind die zwei Saugventile, durch welche das Wasser aus dem Behälter in Fig. 180.

die Stiefel dringet, und P und R die zwei Seitenventile, durch die es entweder in eine gemeinschäftliche Steigröhre, oder aber wie hier in einen zwischen den zween Stiefeln angebrachten sogenanten Windkessel MN gedrückt wird. Dieser Windkessel ist oben bei M mit einem Hut auf das genaueste geschlossen, damit er Luft hält, unten bei N aber mit einen Loch versehen, an welches entweder die Steigröhre, oder ein lederner Schlauch NO angeschraubet wird, um solchen hinführen zu können, wo es nöthig ist. Durch diesen Windkessel erhält man den Vorteil, daß das Wasser durch die Mündung O nicht Stoßweis, wie bei den Sprizen, welche keinen Windkessel haben, geschihet, sondern ununterbrochen ausgesprizt werde; denn da durch die Seitenventile P und R mehr Wasser in den Kessel dringet, als durch die Mündung O ausgesprizt wird, so häuffet sich dasselbe in ihm; eben dadurch aber wird die darin befindliche Luft gewaltig zusammengedrückt, welche alsdenn das Wasser mit einer stäts gleichbleibenden Kraft durch die Oefnung N und O ununterbrochen hinaustreibet.

Um endlich noch von der Art eine kurze Erinnerung zu machen, nach welcher die Last oder der Widerstand, welchen das Wasser gegen die Kolben oder der bewegenden Kraft sowohl bei Hebwerken als Druckwerken machet, berechnet wird, so hat man überhaupt zu merken, daß die Last des zu hebenden Wassers bei einem Hebewerke dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, welche die Grundfläche des Kolbens zur Grundfläche, die Höhe des ober dem Kolben befindlichen Wassers aber zur Höhe hat. Uber dieses, da der Kolbe, wenn er in die Höhe gezogen wird, nebst deme, daß er das obere Wasser hebet, das untere zugleich sauget, so wird dadurch noch eine besondere Last oder Widerstand verursachet, die man füglich für das

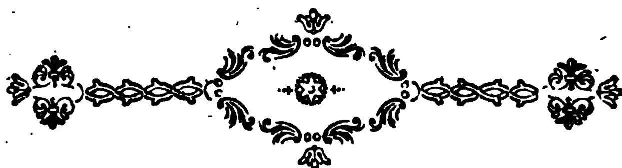
Ge-

Gewicht einer Wassersäule annehmen kan, welche mit dem Kolben gleiche Grundfläche, und die Höhe des Kolbenzuges selbst zur Höhe hat. Daher man denn bei Hebwerken überhaupt das Gewicht der Wassersäule, welche von dem untern Ventil bis zum Ausguß reichet, und mit dem Kolben gleichen Durchmesser hat, für die zu bewegende Last annehmen kan.

Bei Druckwerken ist die zu bewegen vorhandene Last dem Gewicht einer Wassersäule gleich, die mit dem Kolben gleiche Grundfläche, und die Höhe des in der Steigröhre befindlichen Wassers über das untere Ventil zur Höhe hat §. 338 u. 339. wo man also siehet, daß es auf den Durchmesser der Steigröhre eben nicht ankomme, es wäre denn, daß er an derselben in Ansehung des Stiefels gar zu klein angenommen würde; als in welchem Falle alsdenn auch ein grösserer Widerstand entstehet.

Wer mehrere und ausführlichere Nachrichten von Pumpwerken und andern zur Bewegung des Wassers dienlichen Machinen verlangt, kan sich in Belidors Hydraulik, in Leopolds Theatrum Machinarum, u. m. a. Raths erholen. Die vorgeschriebenen Gränzen erlauben uns nicht hierinnen weiter zu gehen, sondern verbinden uns vielmehr gegenwärtige Anfangsgründe hiemit zu beschliessen.





Register

Der merkwürdigsten in diesem Teile vorkommenden Sachen.

Oef-





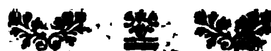
men





halt





Feuer.







§§.

Was



Kör-



den





§§.

Die



Wie





Nach





In







§§.

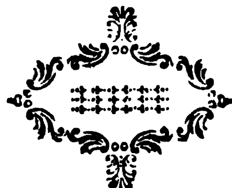
Wie



Die







Verbesserungen
einiger eingeschlichenen Fehler.

§. 33. In der 4ten Zeile anstaat (grösser) setze (bald grösser bald kleiner).
In der 7ten Zeile anstaat (einen grössern Raum) setze (auch bald einen grössern, bald einen kleinern Raum).
In der 9ten Zeile nach (Richtung) setze (zugleich).
In der 12ten Zeile nach (aufheben) setze (nachdem nehmlich der Winkel BAC beschaffen ist).

§. 41. In der 3ten Zeile anstaat (HY) setze (DS).
In der 6ten Zeile anstaat (CS) setze (DS).
In der 19ten und folgenden Zeilen dieses §. anstaat (CS) setze (DS).

§. 65. In der 4ten Zeile nach (Fläche) setze (von gleicher Höhe).
In der 31ten Zeile nach (senkrecht) setze (durch EF).

§. 67. In der 3ten Zeile nach (Fläche) setze (von gleicher Höhe).

§. 70. In der 2ten Zeile nach (Flächen) setze (von gleicher Höhe).

§. 77. In der 29ten Zeile anstaat (§. 45.) setze (§. 25.).

§. 158. In der 6ten Zeile nach (gleiche) setze (Bemühung der).

§. 170. In der 4ten Zeile nach (regelmässigen) setze (simmetrischen).
In der 6ten Zeile nach (Kubus) setze (Parallelopipedums).

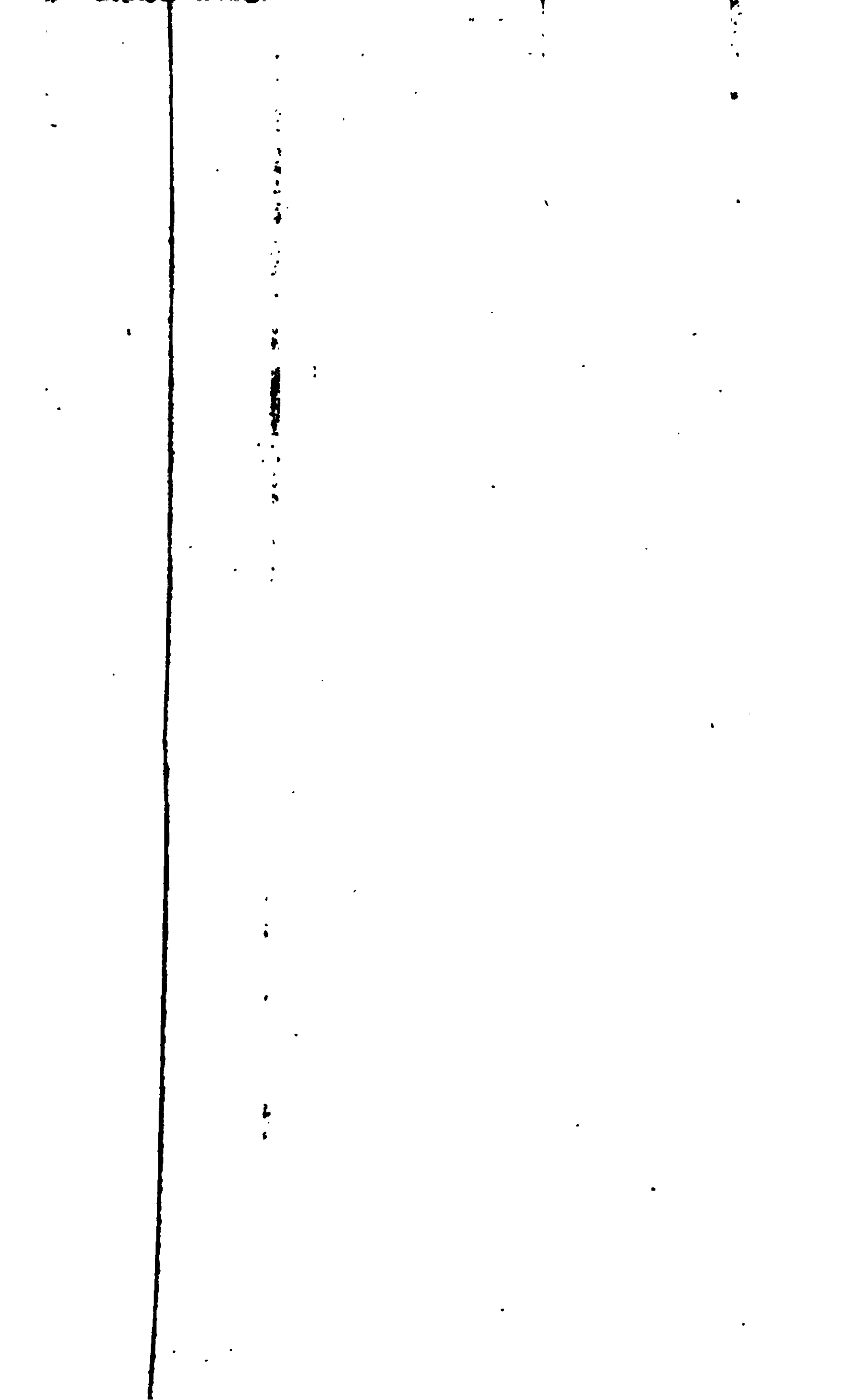
§. 176.

§. 176. In der 10ten Zeile nach (regelmässigen) setze (und simmetrischen).

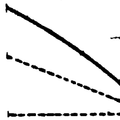
In der 14ten Zeile anstaat (Prismen) setze (Parallelopipeden).

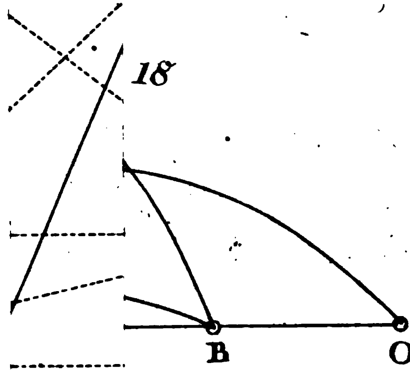
§. 195. In der 1ten Zeile nach (aus der) setze (senkrechten).

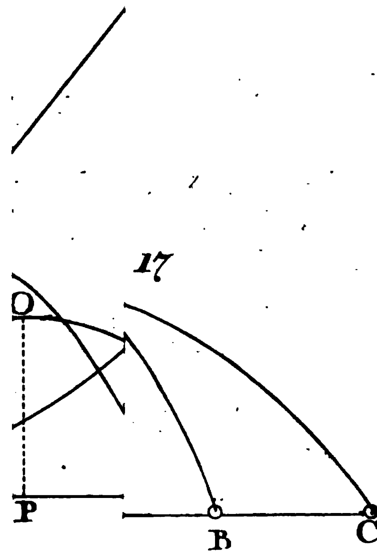
In der 3ten und 26ten eben so.



X
G
F
E
M
N
S T O
Y
X
Y
A
C
H
F
B
G
∫x
Sy
L
C
O I

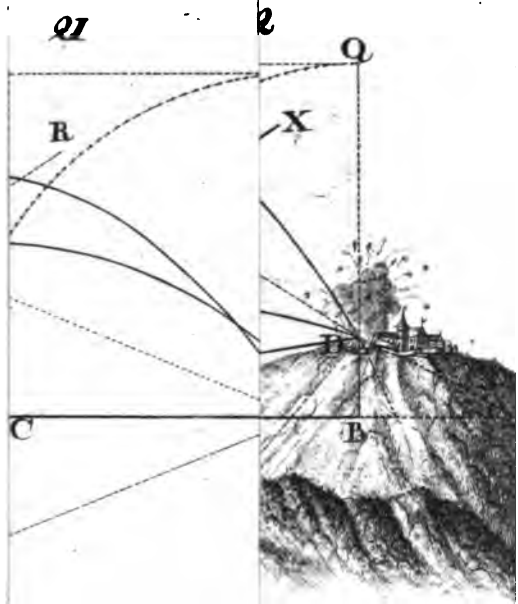

16


18
B
O

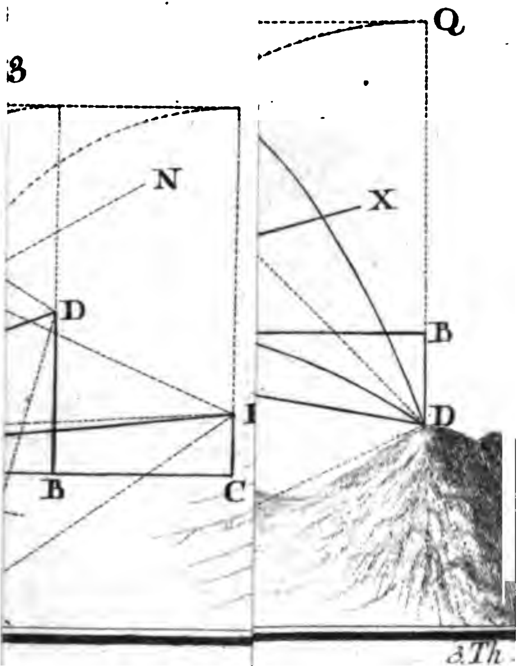

17
O
P
B
C



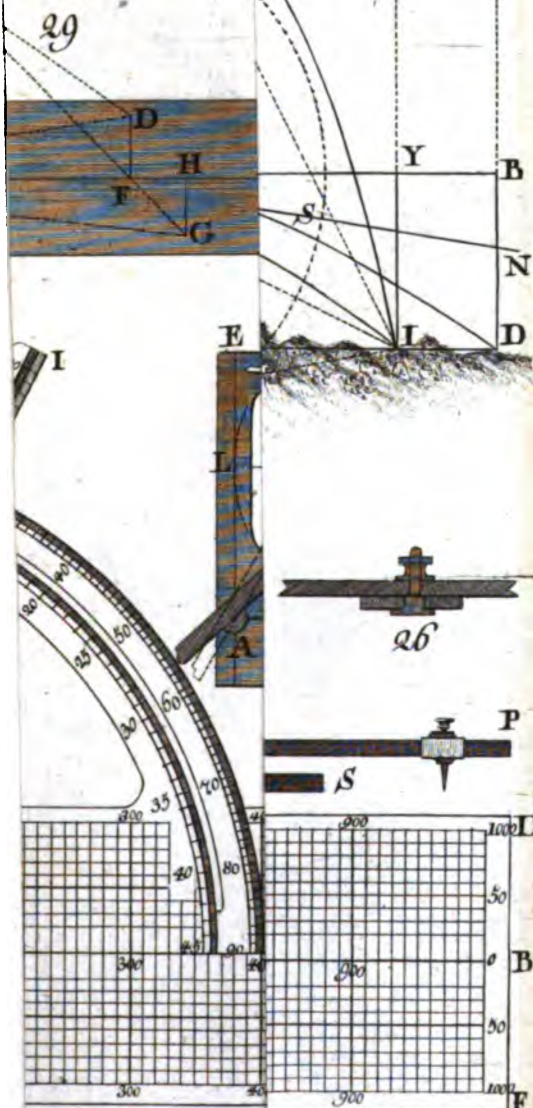
O
E
L
L
E
G
I
Z
I
F
R
F
T
C
B
M
M
B
C
V

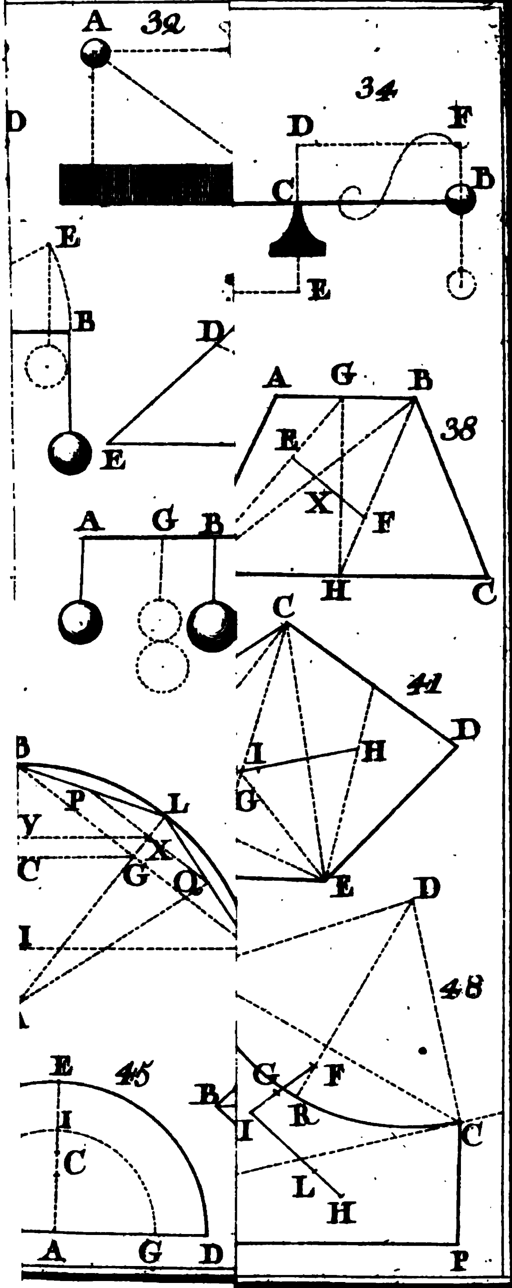


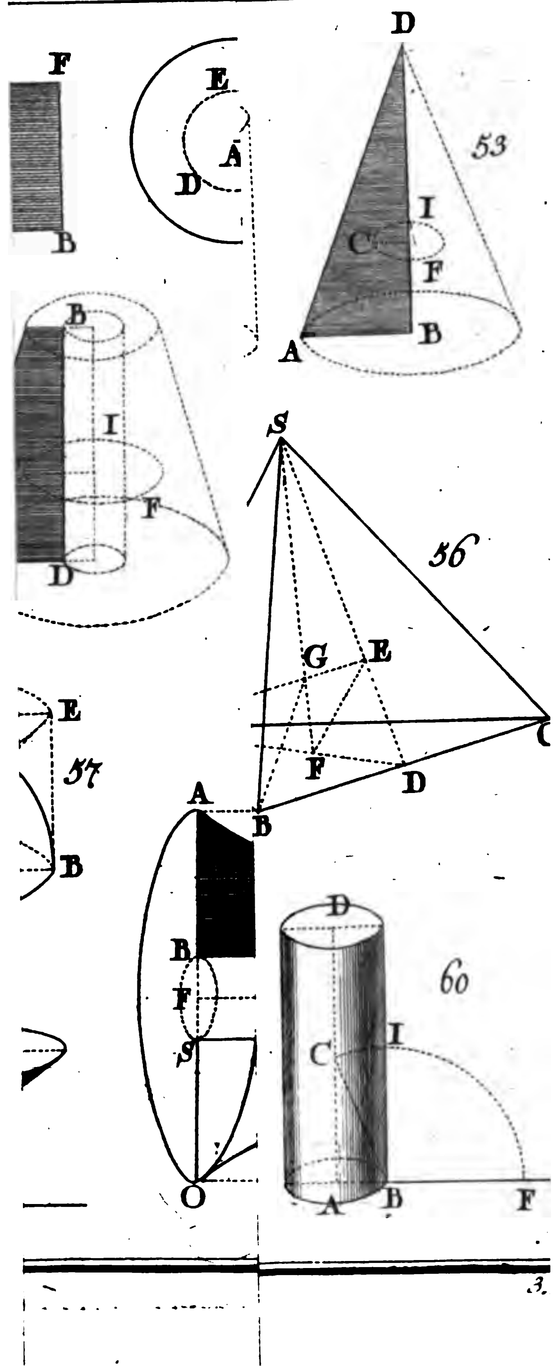
1
2
Q
R
X
D
C
B

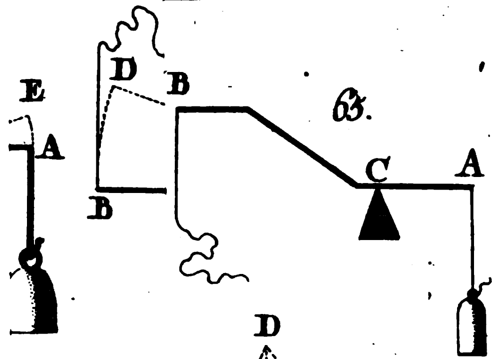


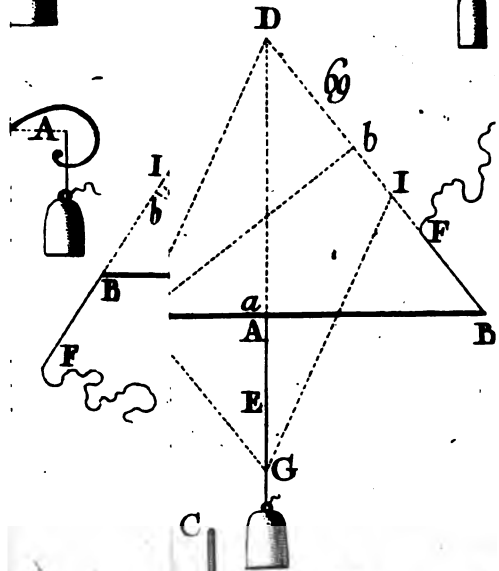
3
Q
N
X
D
B
D
B
C

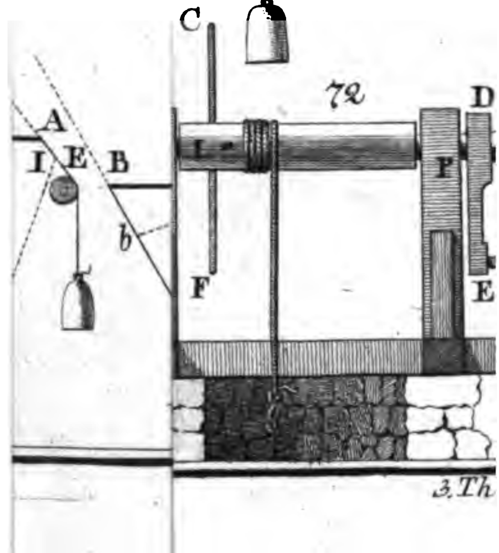

H
M
29
D
H
F
G
Y
B
S
N
E
I
D
I
L
A
26
P
S
900
1000
50
0
B
900
50
1000
900
F
300
35
40
45
300
300
20
40
25
50
30
60
70
80
90

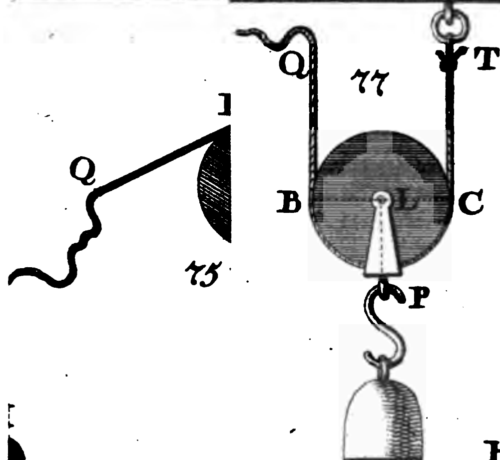

32
A
D
34
D
F
C
B
E
E
B
D
E
A
G
B
38
E
X
F
A
G
B
H
C
C
41
D
I
H
G
E
B
P
L
Y
X
C
G
Q
I
D
48
E
45
B
G
F
I
R
C
C
I
L
H
A
G
D
P

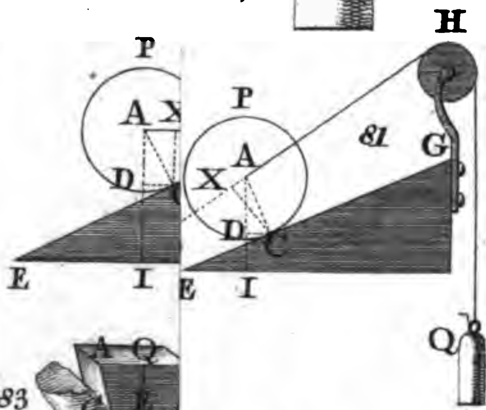

F
B
E
A
D
D
53
I
C
F
B
A
B
I
F
D
S
56
G
E
C
F
D
E
57
B
A
B
B
F
S
O
D
60
I
C
A
B
F

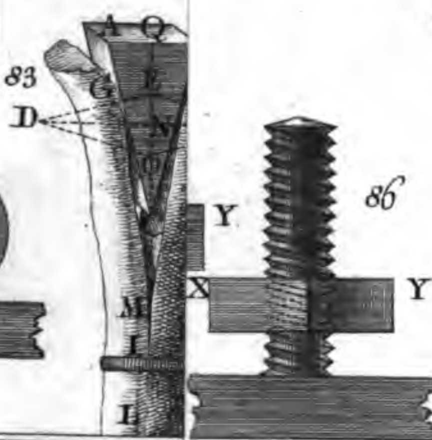

E
A
D
B
B
B
63.
C
A

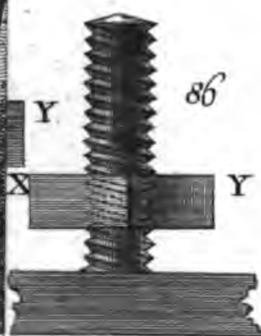

D
69
A
b
I
I
b
F
B
a
A
B
F
E
G

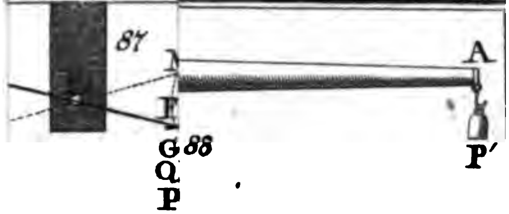

C
72
D
A
I
E
B
L
P
b
F
E

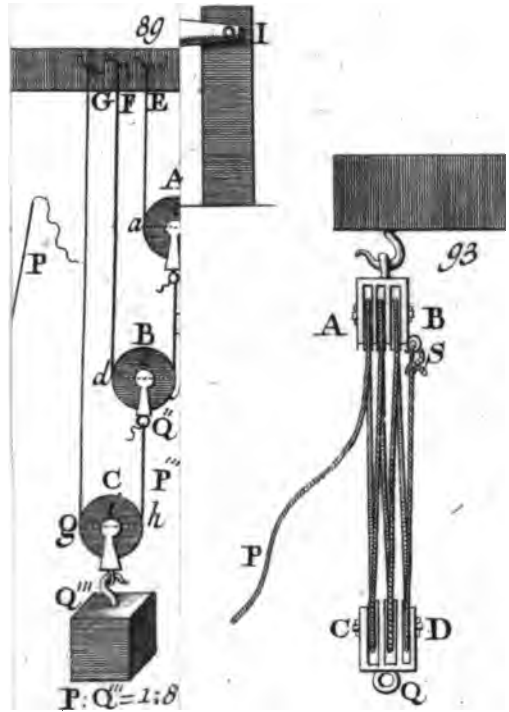

Q
T
77
Q
75
B
L
C
P

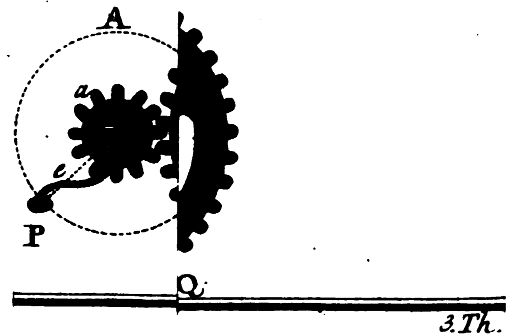

H
P
A X
D
E
I
P
81
G
A
X
D
C
E
I
Q

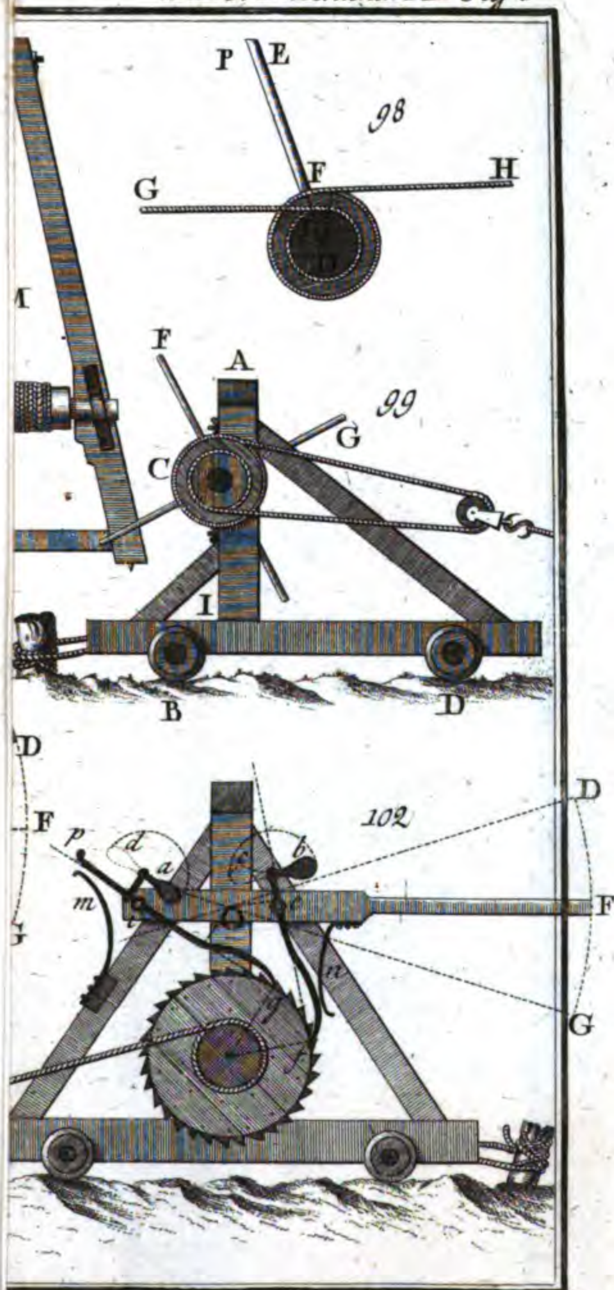

A Q
83
G
E
D
N
Y
X
M
I
L

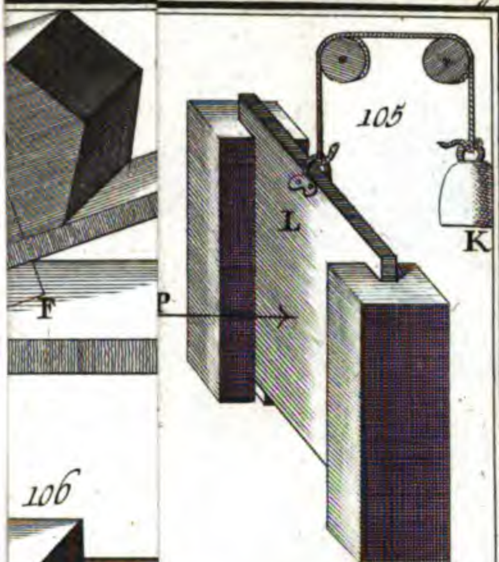

86
Y

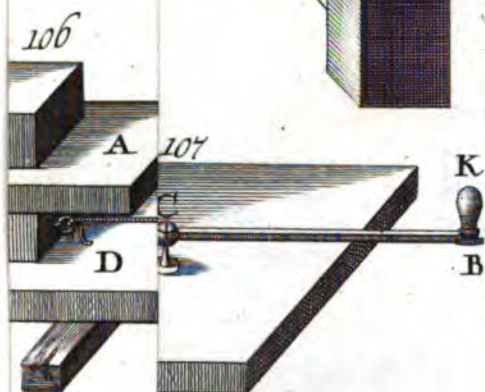

87
A
F
G 88
Q
P
P′

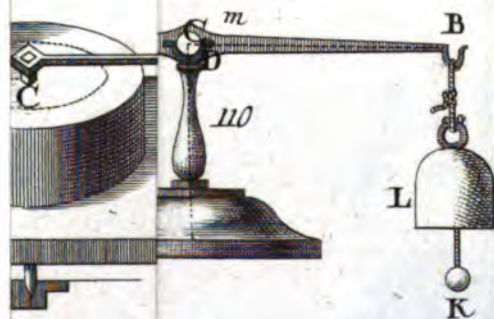

89
I
G F E
A
a
P
B
d
Q''
C
P'''
g
h
Q'''
P : Q''' = 1 : 8
93
A
B
S
P
C
D
Q

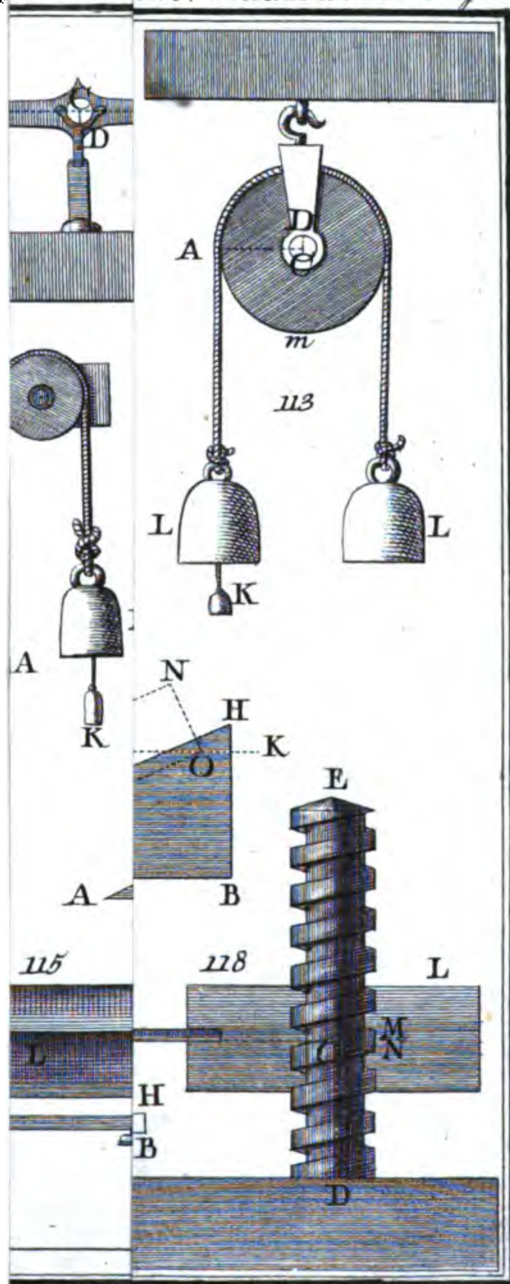

A
a
e
P
Q

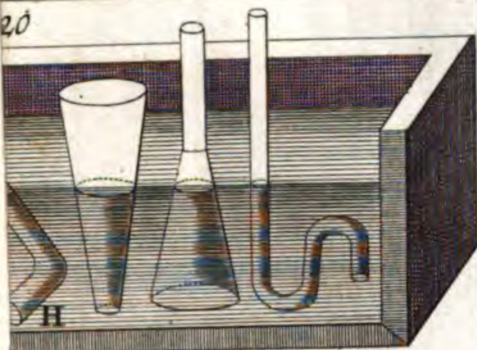

P
E
98
F
G
H
F
A
99
G
C
I
B
D
D
F
p
d
a
c
b
102
D
m
n
F
G


105
L
K
F
P

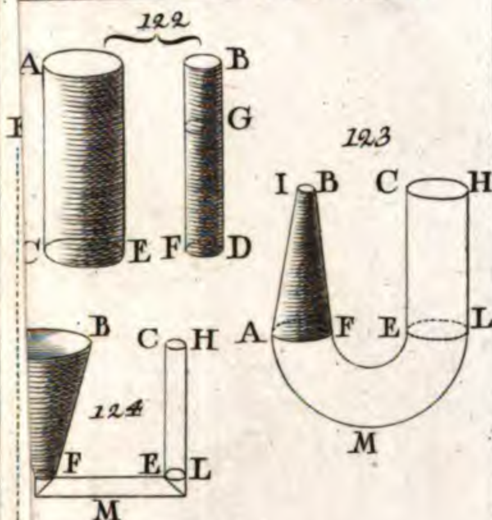

106
A
107
K
C
D
B


m
B
C
D
C
110
L
K

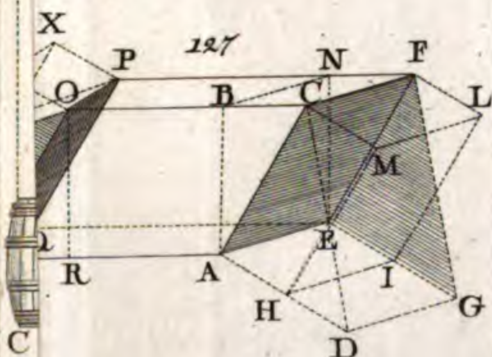

C
D
D
A
C
m
113
L
L
K
A
K
N
H
K
O
E
A
B
115
118
L
M
N
H
B
D



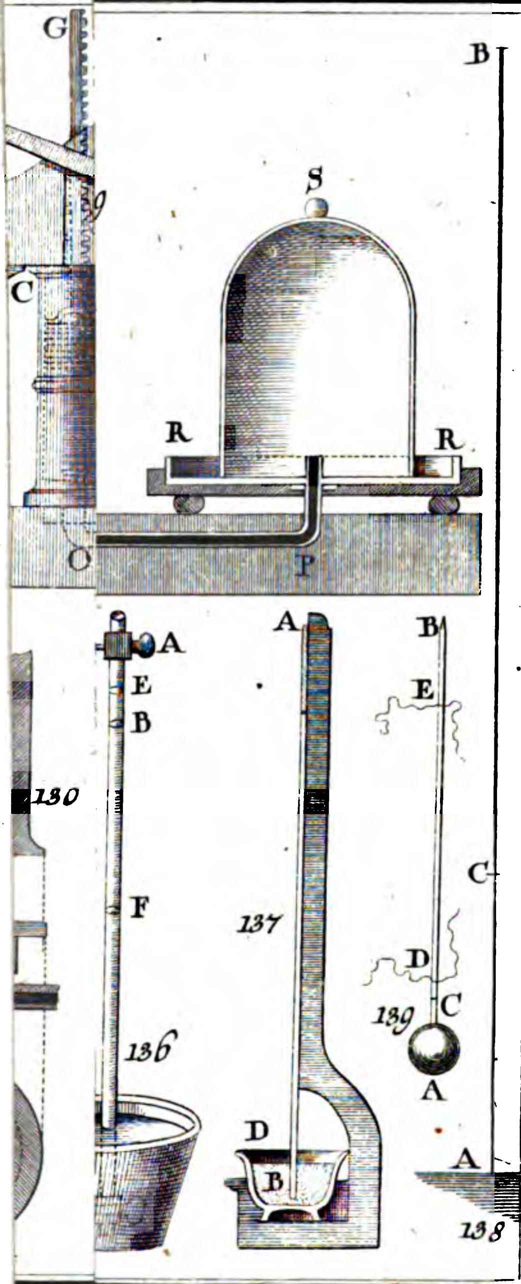
20
H

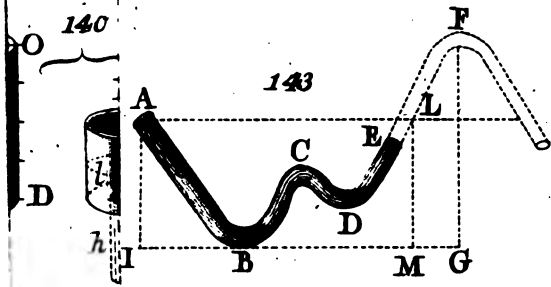


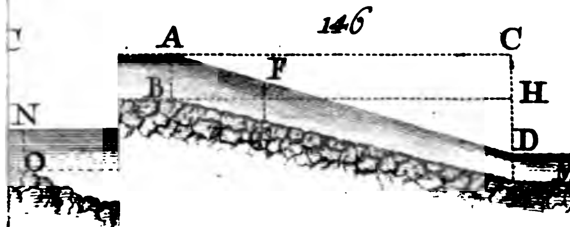
122
A
B
G
C
E
F
D
123
I
B
C
H
A
F
E
L
M
B
C
H
124
F
E
L
M

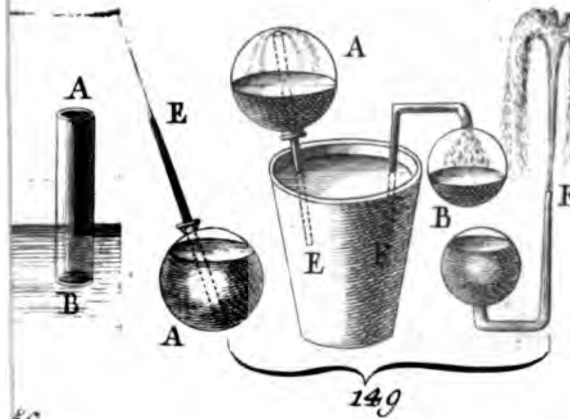


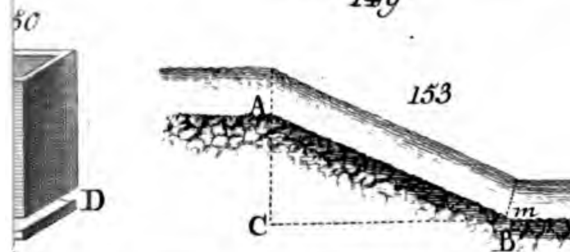
X
127
P
N
F
O
B
C
L
M
E
R
A
I
H
G
C
D

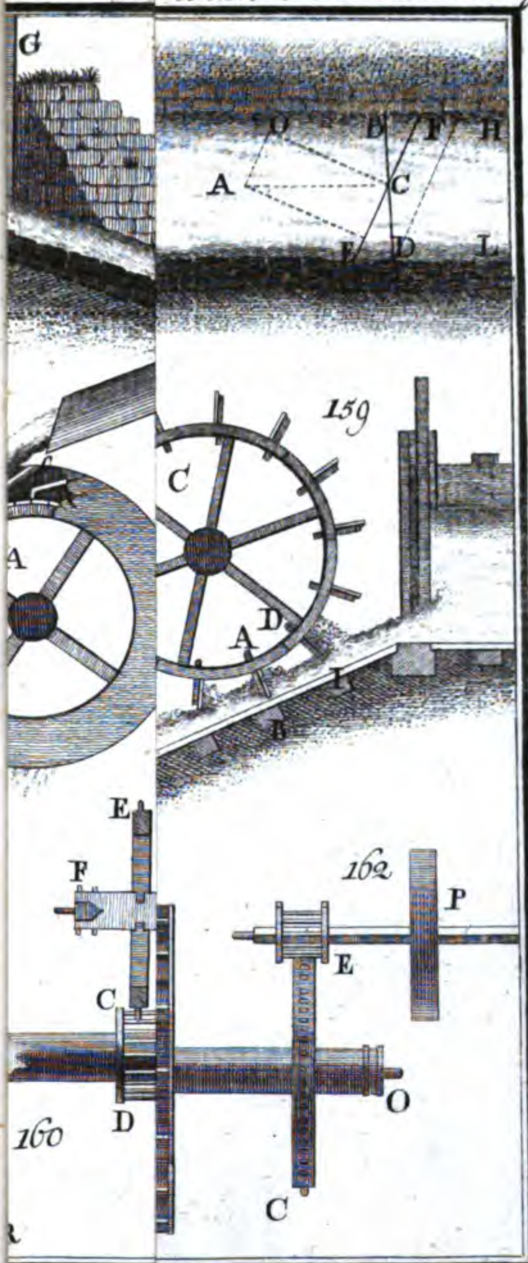

G
C
O
S
R
R
P
B
A
E
B
130
F
136
A
137
D
B
B
E
C
D
C
139
A
A
138

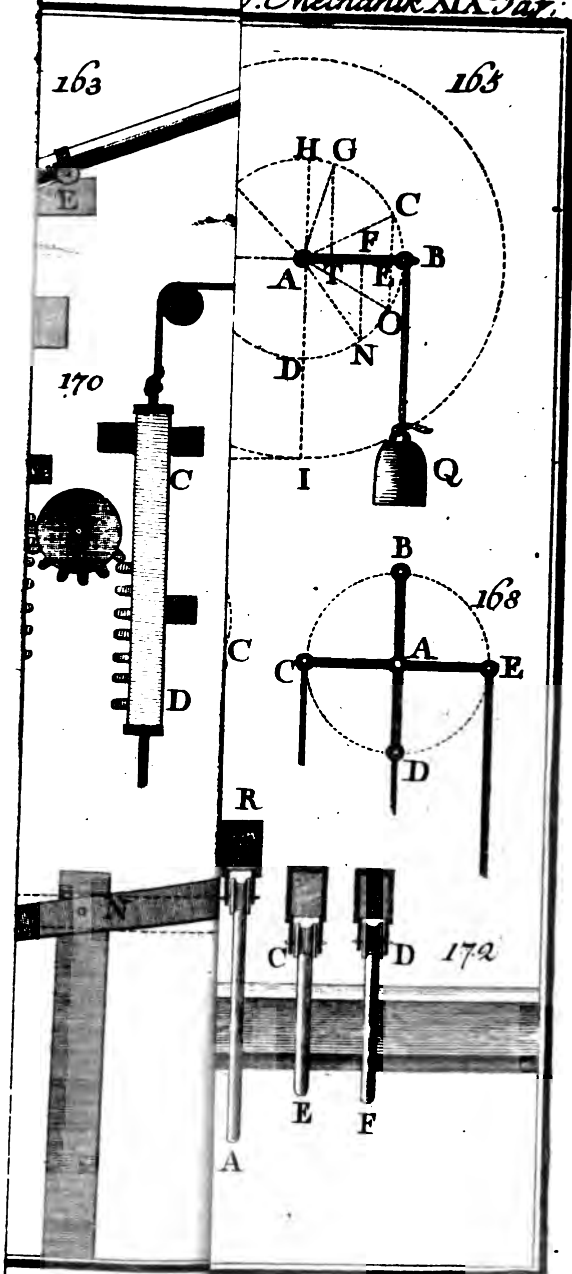

140
O
D
h
143
A
B
C
D
E
F
L
I
M
G

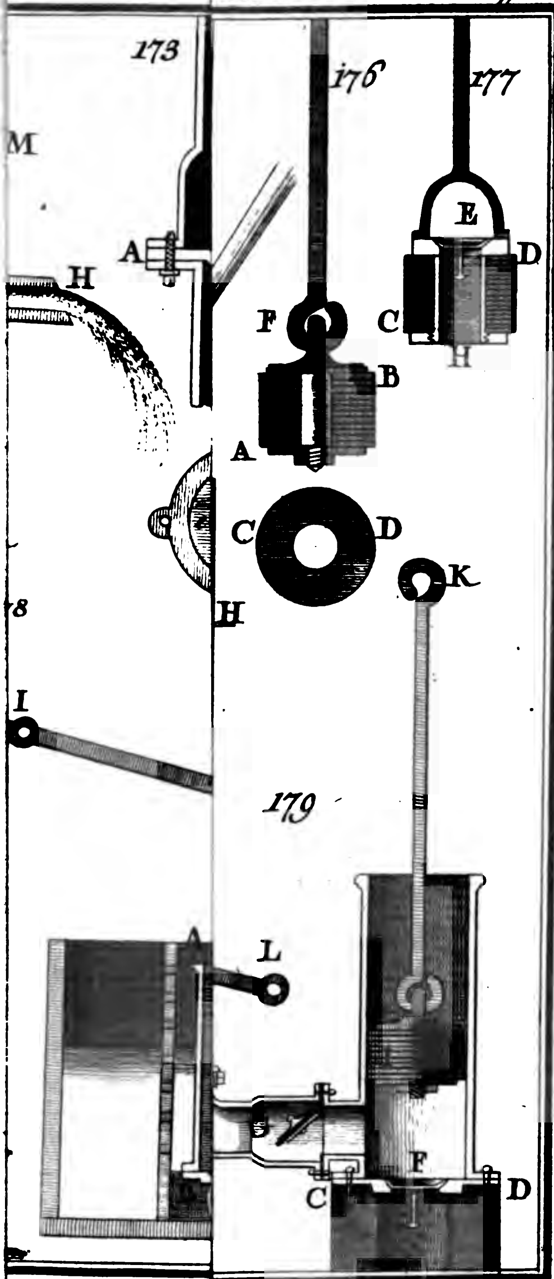

146
A
B
F
C
H
D
N
O


A
B
E
A
A
E
B
F
149


153
A
C
D
m
B


G
O
B
F
H
A
C
E
D
L
159
C
A
D
A
E
B
E
F
C
D
160
R
162
P
E
O
C


163
165
H
G
C
F
A
T
E
B
O
N
D
I
Q
170
C
D
C
B
168
A
C
E
D
R
N
C
D
172
E
F
A


173
176
177
M
A
H
E
D
C
F
B
A
C
D
K
H
I
179
L
F
C
D

